高考数学高频易错题解析

高中数学中有许多题目，求解的思路不难，但解题时，对某些特殊情形的讨论，却很容易被忽略。也就是在转化过程中，没有注意转化的等价性，会经常出现错误。本文通过几个例子，剖析致错原因，希望能对同学们的学习有所帮助。加强思维的严密性训练。

● **忽视等价性变形，导致错误。**

$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ xy>0 \end{cases}$，但 $\begin{cases} x>1 \\ y>2 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x+y>3 \\ xy>2 \end{cases}$ 不等价。

【例 1】已知 f(x) = $ax+\frac{x}{b}$，若 $-3\le f(1)\le 0,\ 3\le f(2)\le 6,$ 求 $f(3)$ 的范围。

错误解法 由条件得 $\begin{cases} -3\le a+b\ \le 0 & ① \\ 3\le 2a+\dfrac{b}{2}\ \le 6 & ② \end{cases}$

②×2－① $6\le a\le 15$ ③

①×2－②得 $-\frac{8}{3}\le\frac{b}{3}\le-\frac{2}{3}$ ④

③+④ 得 $\frac{10}{3}\le 3a+\frac{b}{3}\le\frac{43}{3},$ 即 $\frac{10}{3}\le f(3)\le\frac{43}{3}.$

错误分析 采用这种解法，忽视了这样一个事实：作为满足条件的函数 $f(x)=ax+\frac{x}{b}$，其值是同时受 a 和 b 制约的。当 a 取最大（小）值时，b 不一定取最大（小）值，因而整个解题思路是错误的。

正确解法 由题意有 $\begin{cases} f(1)=a+b \\ f(2)=2a+\dfrac{b}{2} \end{cases}$，解得：

$a=\frac{1}{3}[2f(2)-f(1)],\quad b=\frac{2}{3}[2f(1)-f(2)],$

$\therefore f(3)=3a+\frac{b}{3}=\frac{16}{9}f(2)-\frac{5}{9}f(1).$ 把 $f(1)$ 和 $f(2)$ 的范围代入得 $\frac{16}{3}\le f(3)\le\frac{37}{3}.$

在本题中能够检查出解题思路错误，并给出正确解法，就体现了思维具有反思性。只有牢固地掌握基础知识，才能反思性地看问题。

●**忽视隐含条件，导致结果错误。**

【例 2】

(1) 设 α、β 是方程 $x^2-2kx+k+6=0$ 的两个实根，则 $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值是

(A) $-\frac{49}{4}$ (B) 8 (C) 18 (D)不存在

思路分析 本例只有一个答案正确，设了3个陷阱，很容易上当。

利用一元二次方程根与系数的关系易得：$\alpha+\beta=2k,\alpha\beta=k+6,$

$$\therefore \quad (\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=\alpha^2-2\alpha+1+\beta^2-2\beta+1$$
$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2$$
$$=4(k-\frac{3}{4})^2-\frac{49}{4}.$$

有的学生一看到$-\frac{49}{4}$，常受选择答案（A）的诱惑，盲从附和。这正是思维缺乏反思性的体现。如果能以反思性的态度考察各个选择答案的来源和它们之间的区别，就能从中选出正确答案。

$\because$ 原方程有两个实根α、β，$\therefore$ $\Delta=4k^2-4(k+6)\ge 0 \Rightarrow \quad k\le -2$ 或 $k\ge 3.$

当$k\ge 3$时，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$的最小值是8；

当$k\le -2$时，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$的最小值是18。

这时就可以作出正确选择，只有（B）正确。

(2) 已知$(x+2)^2+\frac{y^2}{4}=1$，求x^2+y^2的取值范围。

错解 由已知得 $y^2=-4x^2-16x-12$，因此 $x^2+y^2=-3x^2-16x-12=-3(x+\frac{8}{3})^2+\frac{28}{3}$ ，

$\therefore$当$x=-\frac{8}{3}$时，x^2+y^2有最大值$\frac{28}{3}$，即x^2+y^2的取值范围是$(-\infty,\frac{28}{3}]$。

分析 没有注意x的取值范围要受已知条件的限制，丢掉了最小值。

事实上，由于$(x+2)^2+\frac{y^2}{4}=1\Rightarrow(x+2)^2=1-\frac{y^2}{4}\leqslant 1\Rightarrow -3\leqslant x\leqslant -1$，

从而当$x=-1$时x^2+y^2有最小值1。$\therefore$ x^2+y^2的取值范围是$[1,\frac{28}{3}]$。

注意有界性：偶次方$x^2\geqslant 0$，三角函数$-1\leqslant \sin x\leqslant 1$，指数函数$a^x>0$，圆锥曲线有界性等。

●忽视不等式中等号成立的条件，导致结果错误。

【例3】已知：$a>0$, $b>0$, $a+b=1$,求$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$的最小值。

错解 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2=a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4\geqslant 2ab+\frac{2}{ab}+4\geqslant 4\sqrt{ab\bullet\frac{1}{ab}}+4=8,$

∴$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$ 的最小值是 8.

分析 上面的解答中，两次用到了基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，第一次等号成立的条件是 $a=b=\frac{1}{2}$，第二次等号成立的条件是 $ab=\frac{1}{ab}$，显然，这两个条件是不能同时成立的。因此，8 不是最小值。

事实上，原式 $= a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4=(a^2+b^2)+(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})+4=[(a+b)^2-2ab]+[(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^2-\frac{2}{ab}]+4$

$$=(1-2ab)(1+\frac{1}{a^2b^2})+4,$$

由 $ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2=\frac{1}{4}$ 得：$1-2ab\geqslant 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，且 $\frac{1}{a^2b^2}\geqslant 16$，$1+\frac{1}{a^2b^2}\geqslant 17$，

∴原式 $\geqslant\frac{1}{2}\times 17+4=\frac{25}{2}$ (当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立)，

∴$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$ 的最小值是 $\frac{25}{2}$。

●不进行分类讨论，导致错误

【例 4】(1)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^n+1$，求 a_n.

错误解法 $a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n+1)-(2^{n-1}+1)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}.$

错误分析 显然，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3\neq 2^{1-1}=1$。

错误原因：没有注意公式 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 成立的条件是。

因此在运用 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 时，必须检验 $n=1$ 时的情形。即：$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n & (n\geq 2, n\in N)\end{cases}$。

(2)实数 a 为何值时，圆 $x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$ 与抛物线 $y^2=\frac{1}{2}x$ 有两个公共点。

错误解法 将圆 $x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$ 与抛物线 $y^2=\frac{1}{2}x$ 联立，消去 y，

得 $x^2-(2a-\frac{1}{2})x+a^2-1=0\ (x\geq 0).$ ①

因为有两个公共点，所以方程①有两个相等正根，得 $\begin{cases}\Delta=0\\ 2a-\frac{1}{2}>0\\ a^2-1>0.\end{cases}$，解之得 $a=\frac{17}{8}.$

错误分析　（如图 2－2－1；2－2－2）显然，当 $a=0$ 时，圆与抛物线有两个公共点。

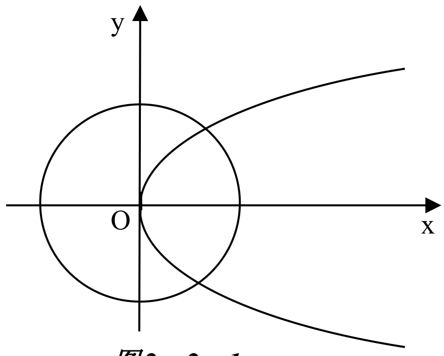


图2－2－1

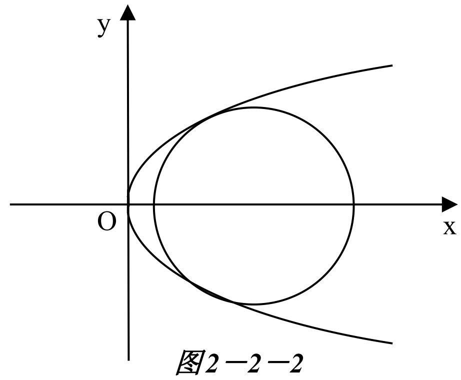


图2－2－2

要使圆与抛物线有两个交点的充要条件是方程①有一正根、一负根；或有两个相等正根。

当方程①有一正根、一负根时，得 $\begin{cases}\Delta>0\\ a^2-1<0.\end{cases}$ 解之，得 $-1<a<1.$

因此，当 $a=\dfrac{17}{8}$ 或 $-1<a<1$ 时，圆 $x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$ 与抛物线 $y^2=\dfrac{1}{2}x$ 有两个公共点。

思考题：实数 a 为何值时，圆 $x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$ 与抛物线 $y^2=\dfrac{1}{2}x$，

(1) 有一个公共点；(2)有三个公共点；(3)有四个公共点；(4)没有公共点。

●以偏概全，导致错误

以偏概全是指思考不全面，遗漏特殊情况，致使解答不完全，不能给出问题的全部答案，从而表现出思维的不严密性。

【例 5】(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的全 n 项和为 S_n.若 $S_3+S_6=2S_9$，求数列的公比 q.

错误解法　$\because\ S_3+S_6=2S_9,\therefore\ \dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\cdot\dfrac{a_1(1-q^9)}{1-q}$，

整理得　$q^3(2q^6-q^3-1)=0.$

由 $q\neq0$ 得方程　$2q^6-q^3-1=0.\ \therefore\ (2q^3+1)(q^3-1)=0,\therefore q=-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$　或　$q=1$

。

错误分析　在错解中，由$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\cdot\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}$，

整理得　$q^3(2q^6-q^3-1)=0$时，应有$a_1\neq 0$和$q\neq 1$。

在等比数列中，$a_1\neq 0$是显然的，但公比q完全可能为1，因此，在解题时应先讨论公比$q=1$的情况，再在$q\neq 1$的情况下，对式子进行整理变形。

正确解法　若$q=1$，则有$S_3=3a_1,S_6=6a_1,S_9=9a_1$. 但$a_1\neq 0$，即得$S_3+S_6\neq 2S_9$,与题设矛盾，故$q\neq 1$.

又依题意　$S_3+S_6=2S_9$　$\Rightarrow$　$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\cdot\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}$　$\Rightarrow$

$q^3(2q^6-q^3-1)=0$，即$(2q^3+1)(q^3-1)=0,$ 因为$q\neq 1$，所以$q^3-1\neq 0,$ 所以$2q^3+1=0.$解得　$q=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$

说明　此题为1996年全国高考文史类数学试题第（21）题，不少考生的解法同错误解法，根据评分标准而痛失2分。

(2)求过点$(0,1)$的直线，使它与抛物线$y^2=2x$仅有一个交点。

错误解法　设所求的过点$(0,1)$的直线为$y=kx+1$，则它与抛物线的交点为

$\begin{cases}y=kx+1\\y^2=2x\end{cases}$，消去$y$得$(kx+1)^2-2x=0.$整理得　$k^2x^2+(2k-2)x+1=0.$

$\because$直线与抛物线仅有一个交点，$\therefore\Delta=0,$解得$k=\frac{1}{2}.$　$\therefore$所求直线为$y=\frac{1}{2}x+1.$

错误分析　此处解法共有三处错误：

第一，设所求直线为$y=kx+1$时，没有考虑$k=0$与斜率不存在的情形，实际上就是承认了该直线的斜率是存在的，且不为零，这是不严密的。

第二，题中要求直线与抛物线只有一个交点，它包含相交和相切两种情况，而上述解法没有考虑相切的情况，只考虑相交的情况。原因是对于直线与抛物线“相切”和“只有一个交点”的关系理解不透。

第三，将直线方程与抛物线方程联立后得一个一元二次方程，要考虑它的判别式，所以

它的二次项系数不能为零，即 $k\neq 0,$ 而上述解法没作考虑，表现出思维不严密。

正确解法 ①当所求直线斜率不存在时，即直线垂直 x 轴，因为过点 $(0,1)$，所以 $x=0,$ 即 y 轴，它正好与抛物线 $y^2=2x$ 相切。

②当所求直线斜率为零时，直线为 y = 1 平行 x 轴，它正好与抛物线 $y^2=2x$ 只有一个交点。

③一般地，设所求的过点 $(0,1)$ 的直线为 $y=kx+1\ (k\neq 0)$,则 $\begin{cases} y=kx+1 \\ y^2=2x \end{cases}$,

$\therefore k^2x^2+(2k-2)x+1=0.$ 令 $\Delta=0,$ 解得 k = $\frac{1}{2}$，∴ 所求直线为 $y=\frac{1}{2}x+1.$

综上，满足条件的直线为：$y=1,\quad x=0,\quad y=\frac{1}{2}x+1.$

《章节易错训练题》

1、已知集合 M = {直线} ，N = {圆} ，则 M∩N 中元素个数是 **A(集合元素的确定性)**

(A) 0 (B) 0 或 1 (C) 0 或 2 (D) 0 或 1 或 2

2、已知 A = ｛x ｜ $x^2+tx+1=0$｝，若 A∩$R^*=\Phi$，则实数 t 集合 T = ___。$\{t|t>-2\}$**(空集)**

3、如果 $kx^2+2kx-(k+2)<0$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是 **C(等号)**

(A) $-1\leqslant k\leqslant 0$ (B) $-1\leqslant k<0$ (C) $-1<k\leqslant 0$ (D) $-1<k<0$

4、命题 $A:|x-1|<3$，命题 $B:(x+2)(x+a)<0$，若 A 是 B 的充分不必要条件，则 a 的取值范围是 **C(等号)**

（A）$(4,+\infty)$ （B）$[4,+\infty)$ （C）$(-\infty,-4)$ （D）$(-\infty,-4]$

5、若不等式 $x^2-\log_a x<0$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 内恒成立，则实数 a 的取值范围是 **A(等号)**

(A) $[\frac{1}{16},1)$ (B) $(1,+\infty)$ (C) $(\frac{1}{16},1)$ (D) $(\frac{1}{2},1)\cup(1,2)$

6、若不等式 $(-1)^n a<2+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 对于任意正整数 n 恒成立，则实数 a 的取值范围是 **A(等号)**

(A) $[-2，\frac{3}{2})$　　(B) $(-2，\frac{3}{2})$　　(C) $[-3，\frac{3}{2})$　　(D) $(-3，\frac{3}{2})$

7、已知定义在实数集$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足：$f(1)=1$；当$x<0$时，$f(x)<0$；对于任意的实数x、y都有$f(x+y)=f(x)+f(y)$。证明：$f(x)$为奇函数。**(特殊与一般关系)**

8、已知函数 $f(x)=\frac{1-2x}{x+1}$，则函数$f(x)$的单调区间是_____。**递减区间$(-\infty，-1)$和$(-1，+\infty)$**

（单调性、单调区间）

9、函数 $y=\sqrt{log_{0.5}(x^2-1)}$ 的单调递增区间是________。**$[-\sqrt{2}，-1)$（定义域）**

10、已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x+2) & x>0\\ \frac{x}{x-1} & x\leqslant 0\end{cases}$，$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)$=_____。

$$\begin{cases}2^x-2 & x>1\\ \frac{x}{x-1} & 0\leqslant x<1\end{cases}$$

（漏反函数定义域即原函数值域）

11、函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+ax+2)$ 值域为 **R**，则实数 a 的取值范围是 **D(正确使用△≥0和△<0)**

(A) $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$　　(B) $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$

(C) $(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$　　(D) $(-\infty,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},+\infty)$

12、若$x\geqslant0$，$y\geqslant0$且$x+2y=1$，那么$2x+3y^2$的最小值为 **B(隐含条件)**

（*A*）2　　（*B*）$\frac{3}{4}$　　（*C*）$\frac{2}{3}$　　（*D*）0

13、函数 $y=\frac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}$ 的值域是________。**$(-\infty,\frac{2}{5})\cup(\frac{2}{5},1)\cup(1,+\infty)$（定义域）**

14、函数 $y=\sin x(1+\tan x\tan\frac{x}{2})$的最小正周期是 **C（定义域）**

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) π　　(C) 2π　　(D) 3

15、已知 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数，当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=2^x$，则 $f(\log_{\frac{1}{2}}23)=$ **D(对数运算)**

(A) $\frac{23}{16}$　　(B) $\frac{16}{23}$　　(C) $-\frac{16}{23}$　　(D) $-\frac{23}{16}$

16、已知函数$f(x)=ax^3+bx^2-3x$在$x=\pm1$处取得极值。

（1）讨论 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值还是极小值；

（2）过点 $A(0,\ 16)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，求此切线方程。(2004 天津)

（求极值或最值推理判断不充分(建议列表)；求过点切线方程，不判断点是否在曲线上。）

17、已知 **tan** $(\alpha-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{5}$ 则 **tan** α =__；$\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{3\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha}$ =__。$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 、$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ （化齐次式）

18、若 $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta-2\sin\alpha=0$，则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta$ 的最小值是 ____。$\boldsymbol{\frac{14}{9}}$ **(隐含条件)**

19、已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$ ，$\theta\in(0，\pi)$，则 $\cot\theta=$ ________。$\boldsymbol{-\frac{3}{4}}$ **(隐含条件)**

20、在△ABC 中，用 a、b、c 和 A、B、C 分别表示它的三条边和三条边所对的角，若 a =2、$b=\sqrt{2}$、$A=\frac{\pi}{4}$，则∠B = **B(隐含条件)**

（A）$\frac{\pi}{12}$　　（B）$\frac{\pi}{6}$　　（C）$\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$　　（D）$\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{11\pi}{12}$

21、已知 $a>0$, $b>0$, $a+b=1$，则$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$ 的最小值是________。$\boldsymbol{\frac{25}{2}}$ **(三相等)**

22、已知 $x\neq k\pi\ (k\in Z)$，函数 $y=\sin^2x+\frac{4}{\sin^2x}$ 的最小值是_______。**5**（三相等）

23、求 $y=\dfrac{2}{\sin^2 x}+\dfrac{8}{\cos^2 x}$ 的最小值。

错解 1　$y=\dfrac{2}{\sin^2 x}+\dfrac{8}{\cos^2 x}\geq 2\cdot\sqrt{\dfrac{2}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{8}{\cos^2 x}}=\dfrac{8}{|\sin x\cos x|}$

$=\dfrac{16}{|\sin 2x|}\geq 16,.\quad\therefore y_{\min}=16.$

错解 2

$$y=(\frac{2}{\sin^2 x}+\sin^2 x)+(\frac{8}{\cos^2 x}+\cos^2 x)-1\geq 2\sqrt{2}+2\sqrt{8}-1=-1+6\sqrt{2}.$$

错误分析　在解法 1 中，$y=16$ 的充要条件是 $\dfrac{2}{\sin^2 x}=\dfrac{8}{\cos^2 x}$ 且 $|\sin 2x|=1.$

即 $|\tan x|=\dfrac{1}{2}$ 且 $|\sin x|=1.$ 这是自相矛盾的。$\therefore y_{\min}\neq 16.$

在解法 2 中，$y=-1+6\sqrt{2}$ 的充要条件是

$\dfrac{2}{\sin^2 x}=\sin^2 x$ 且 $\dfrac{8}{\cos^2 x}=\cos^2 x$，即 $\sin^2 x=\sqrt{2}$，$\cos^2 x=2\sqrt{2}$, 这是不可

能的。

正确解法 1 $y=2\csc^2 x+8\sec^2 x$

$$
\begin{aligned}
&=2(1+\cot^2 x)+8(1+\tan^2 x)\\
&=10+2(\cot^2 x+4\tan^2 x)\\
&\geq 10+2\cdot 2\sqrt{\cot^2 x\cdot 4\tan^2 x}\\
&=18.
\end{aligned}
$$

其中，当$\cot^2 x=4\tan^2 x$，即$\cot^2 x=2$时，$y=18.\therefore y_{\min}=18.$

正 确 解 法 2 取正常数k，易得

$$y=(\frac{2}{\sin^2 x}+k\sin^2 x)+(\frac{8}{\cos^2 x}+k\cos^2 x)-k$$

$$\geq 2\cdot\sqrt{2k}+2\cdot\sqrt{8k}-k=6\cdot\sqrt{2k}-k.$$

其中“≥”取“＝”的充要条件是

$\frac{2}{\sin^2 x}=k\sin^2 x$且$\frac{8}{\cos^2 x}=k\cos^2 x$，即$\tan^2 x=\frac{1}{2}$且$k=18.$

因此，当$\tan^2 x=\frac{1}{2}$时，$y=6\cdot\sqrt{2k}-k=18,\therefore y_{\min}=18.$

24、已知 $a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+2^{n-1}(n\geqslant 2)$，则 $a_n=$ ________。**2^n-1(认清项数)**

25、已知 －9、a_1、a_2、－1 四个实数成等差数列，－9、b_1、b_2、b_3、－1 五个实数成等比数列，

则 $b_2(a_2-a_1)=$ **A(符号)**

(A) －8 (B) 8 (C) $-\frac{9}{8}$ (D) $\frac{9}{8}$

26、已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，S_n是其前 n 项和，判断 S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$成等比数列吗？

当 $q=-1$，k 为偶数时，$S_k=0$，则 S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$不成等比数列；

当 $q\neq-1$ 或 $q=-1$ 且 k 为奇数时，则 S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$成等比数列。

（忽视公比 $q=-1$）

27、已知定义在 R 上的函数$f(x)$和数列$\{a_n\}$满足下列条件：

$a_1=a,\ a_n=f(a_{n-1})(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots),\ a_2\neq a_1$，$f(a_n)-f(a_{n-1})=k(a_n-a_{n-1})(n=2,3,$ ---)，其中 a 为常数，k 为非零常数。（1）令$b_n=a_{n+1}-a_n\ (n\in N^*)$，证明数列$\{b_n\}$是等比数列；（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（3）当$|k|<1$时，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。(2004 天津)

（等比数列中的 0 和 1，正确分类讨论）

28、不等式 $m^2-(m^2-3m)i< (m^2-4m+3)i+10$ 成立的实数 m 的取值集合是________。

{3}(隐含条件)

29、i 是虚数单位，$\frac{(-1+i)(2+i)}{i^3}$的虚部为（　　）**C(概念不清)**

(A) -1　　(B) $-i$　　(C) -3　　(D) $-3i$

30、实数 m，使方程 $x^2+(m+4i)x+1+2mi=0$ 至少有一个实根。

错误解法　∵方程至少有一个实根，

$\therefore \Delta=(m+4i)^2-4(1+2mi)=m^2-20\ge 0 \Rightarrow m\ge 2\sqrt{5}$, 或 $m\le -2\sqrt{5}$.

错误分析　实数集合是复数集合的真子集，所以在实数范围内成立的公式、定理，在复数范围内不一定成立，必须经过严格推广后方可使用。一元二次方程根的判别式是对实系数一元二次方程而言的，而此题目盲目地把它推广到复系数一元二次方程中，造成解法错误。

正确解法　设 a 是方程的实数根，则

$a^2+(m+4i)a+1+2mi=0, \therefore\ a^2+ma+1+(4a+2m)i=0.$

由于 a、m 都是实数，$\therefore \begin{cases} a^2+ma+1=0 \\ 4a+2m=0 \end{cases}$,解得　$m=\pm 2.$

31、和 $\boldsymbol{a}=(3,-4)$平行的单位向量是________；和 $\boldsymbol{a}=(3,-4)$垂直的单位向量是________。

$(\frac{3}{5}，-\frac{4}{5})$或$(-\frac{3}{5}，\frac{4}{5})$；$(\frac{4}{5}，\frac{3}{5})$或$(-\frac{4}{5}，-\frac{3}{5})$(漏解)

32、将函数 y= 4x－8 的图象 L 按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移到 L'，L'的函数表达式为 y= 4x，则向量 $\boldsymbol{a}$=______。

a = (h，4h+8) (其中 h $\in$ R)(漏解)

33、已知 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，若$\vec{a}//\vec{b}$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}$。

①若$\vec{a}$，$\vec{b}$共向，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=\sqrt{2}$，

②若$\vec{a}$，$\vec{b}$异向，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=-\sqrt{2}$。(漏解)

34、在正三棱锥 A－BCD 中，E、F 是 AB、BC 的中点，EF⊥DE，若 BC = a，则正三棱

锥 A－BCD 的体积为____________。$\frac{\sqrt{2}}{24}$ a^3 **(隐含条件)**

35、在直二面角 α－AB－β 的棱 AB 上取一点 P，过 P 分别在 α、β 两个平面内作与棱成 45° 的斜线 PC、PD，那么∠CPD 的大小为 **D(漏解)**

(A) 45°　(B) 60°　(C) 120°　(D) 60° 或 120°

36、如图，在四棱锥 P—ABCD 中，底面 ABCD 是正方形，侧棱 PD⊥底面 ABCD，PD=DC，E 是 PC 的中点，作 EF⊥PB 交 PB 于点 F。

（1）证明 PA//平面 EDB；

（2）证明 PB⊥平面 EFD；

（3）求二面角 C—PB—D 的大小。(2004 天津)

(条件不充分(漏 PA $\not\subset$ 平面 EDB，$DE \subset$平面 PDC，$DE \cap EF = E$ 等)；运算错误，锐角钝角不分。)

37、若方程 $\frac{x^2}{m}+y^2=1$ 表示椭圆，则 m 的范围是_______。**(0，1)∪(1，+∞)(漏解)**

38、已知椭圆 $\frac{x^2}{m}+y^2=1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 m 的值为 _____ 。**4 或 $\frac{1}{4}$ (漏解)**

39、椭圆的中心在原点，对称轴为坐标轴，椭圆短轴的一个顶点 B 与两焦点 F_1、F_2 组成的三角形的周长为 $4+2\sqrt{3}$ 且$\angle F_1BF_2=\frac{2\pi}{3}$，则椭圆的方程是 ______ 。**$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 或 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$(漏解)**

40、椭圆的中心是原点 O，它的短轴长为$2\sqrt{2}$，相应于焦点 F（c，0）（$c>0$）的准线l与 x 轴相交于点 A，|OF|=2|FA|，过点 A 的直线与椭圆相交于 P、Q 两点。

（1）求椭圆的方程及离心率；（2）若$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，求直线 PQ 的方程；

（3）设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}$（$\lambda>1$），过点 P 且平行于准线$l$的直线与椭圆相交于另一点 M，证明$\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$。(2004 天津)

(设方程时漏条件 $a>\sqrt{2}$，误认短轴是 $b=2\sqrt{2}$；要分析直线 PQ 斜率是否存在(有时也可以设为 x = ky + b)先；对一元二次方程要先看二次项系数为 0 否，再考虑△>0，后韦达定理。)

41、求与 y 轴相切于右侧，并与$\odot C: x^2+y^2-6x=0$ 也相切的圆的圆心

的轨迹方程。

错误解法　如图 3－2－1 所示，已知⊙C 的方程为$(x-3)^2+y^2=9.$

设点 $P(x,y)(x>0)$ 为所求轨迹上任意一点，并且⊙P 与 y 轴相切于 M 点，与⊙C 相切于 N 点。根据已知条件得

$|CP|=|PM|+3$，即 $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=x+3$，化简得 $y^2=12x \quad (x>0)$.

错误分析 本题只考虑了所求轨迹的纯粹性（即所求的轨迹上的点都满足条件），而没有考虑所求轨迹的完备性（即满足条件的点都在所求的轨迹上）。事实上，符合题目条件的点的坐标并不都满足所求的方程。从动圆与已知圆内切，可以发现以 x 轴正半轴上任一点为圆心，此点到原点的距离为半径（不等于 3）的圆也符合条件，所以 $y=0 \quad (x>0且x\neq 3)$ 也是所求的方程。即动圆圆心的轨迹方程是 $y^2 = 12x(x>0)$和 $y=0 \quad (x>0且x\neq 3)$。因此，在求轨迹时，一定要完整的、细致地、周密地分析问题，这样，才能保证所求轨迹的纯粹性和完备性。

42、(如图 3－2－2)，具有公共 y 轴的两个直角坐标平面 α 和 β 所成的二面角 $\alpha-y轴-\beta$ 等于 $60°$.已知 β 内的曲线 C' 的方程是 $y^2=2px'\ (p>0)$，求曲线 C' 在 α 内的射影的曲线方程。

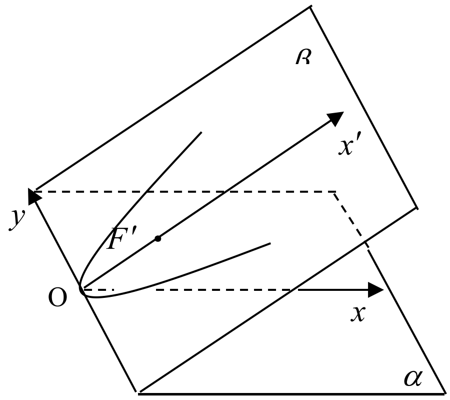


图 3－2－2

错误解法 依题意，可知曲线 C' 是抛物线，

在 β 内的焦点坐标是 $F'(\frac{p}{2},0), p>0.$

因为二面角 $\alpha-y轴-\beta$ 等于 $60°$，

且 $x'轴\perp y轴$，$x轴\perp y轴$，所以 $\angle xox'=60°$.

设焦点 F' 在 α 内的射影是 $F(x,y)$，那么，F 位于 x 轴上，

从而 $y=0, \angle F'OF=60°, \angle F'FO=90°,$

所以 $OF=OF'\cdot\cos 60°=\frac{p}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{p}{4}$.所以点 $F(\frac{p}{4},0)$ 是所求射影的焦点。依题意，射影是一条抛物线，开口向右，顶点在原点。所以曲线 C' 在 α 内的射影的曲线方程是 $y^2=px$.

错误分析 上述解答错误的主要原因是，凭直观误认为 F 是射影(曲线)的焦点，其次，没有证明默认 C'在 α 内的射影(曲线)是一条抛物线。

正确解法 在β内，设点$M(x', y')$是曲线上任意一点（如图3－2－3）过点M作$MN\perp\alpha$，垂足为N，过N作$NH\perp y$轴，垂足为H.连接MH，则$MH\perp y$轴。所以$\angle MHN$是二面角$\alpha-y轴-\beta$的平面角，依题意，$\angle MHN=60°$.

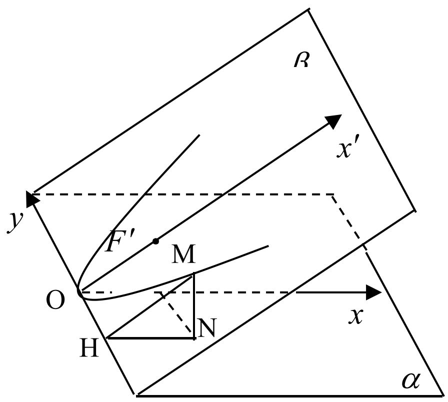


图3－2－3

在$Rt\Delta MNH中, HN=HM\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}x'.$

又知$HM // x'$轴（或M与O重合），

$HN // x$轴（或H与O重合），设$N(x, y)$，

则 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}x' \\ y=y' \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x'=2x \\ y'=y. \end{cases}$

因为点$M(x', y')$在曲线$y^2=2px'\ (p>0)$上，所以$y^2=2p(2x).$

即所求射影的方程为 $y^2=4px(p>0).$

数学推理是由已知的数学命题得出新命题的基本思维形式，它是数学求解的核心。以已知的真实数学命题，即定义、公理、定理、性质等为依据，选择恰当的解题方法，达到解题目标，得出结论的一系列推理过程。在推理过程中，必须注意所使用的命题之间的相互关系（充分性、必要性、充要性等），做到思考缜密、推理严密。

二、选择题：

1．为了得到函数$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象，可以将函数$y=\cos 2x$的图象（ ）

A 向右平移$\frac{\pi}{6}$ B 向右平移$\frac{\pi}{3}$ C 向左平移$\frac{\pi}{6}$ D 向左平移$\frac{\pi}{3}$

错误分析:审题不仔细,把目标函数搞错是此题最容易犯的错误.

答案: B

2．函数$y=\sin x\left(1+\tan x\cdot\tan\frac{x}{2}\right)$的最小正周期为 ( )

A π B 2π C $\frac{\pi}{2}$ D $\frac{3\pi}{2}$

错误分析:将函数解析式化为$y=\tan x$后得到周期$T=\pi$,而忽视了定义域的限制,导致出错.

答案:　B

3.　　曲线 y=2sin(x+$\frac{\pi}{4}$)cos(x-$\frac{\pi}{4}$)和直线 y=$\frac{1}{2}$在 y 轴右侧的交点按横坐标从小到大依次记为 P_1、P_2、P_3……，则$|P_2P_4|$等于　(　　)　　A．π　　B. 2π　　C. 3π　　D. 4π

正确答案：A　错因：学生对该解析式不能变形，化简为 Asin(ωx+ϑ)的形式，从而借助函数图象和函数的周期性求出$|P_2P_4|$。

4．下列四个函数 y=tan2x，y=cos2x，y=sin4x，y=cot(x+$\frac{\pi}{4}$),其中以点($\frac{\pi}{4}$,0)为中心对称的三角函数有（　　）个

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

正确答案：D　错因：学生对三角函数图象的对称性和平移变换未能熟练掌握。

5．函数 y=Asin(ωx+φ)(ω>0,A≠0)的图象与函数 y=Acos(ωx+φ)(ω>0, A≠0)的图象在区间(x_0, x_0+$\frac{\pi}{\omega}$)上（　　）

A. 至少有两个交点　　B. 至多有两个交点

C. 至多有一个交点　　D. 至少有一个交点

正确答案：C 错因：学生不能采用取特殊值和数形结合的思想方法来解题。

6.　在ΔABC 中，2sinA+cosB=2，sinB+2cosA=$\sqrt{3}$，则∠C 的大小应为(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5}{6}\pi$　　D. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

正确答案：A　错因：学生求∠C 有两解后不代入检验。

7．已知 tanα　tanβ是方程 x^2+3$\sqrt{3}$x+4=0 的两根，若α，β∈(-$\frac{\pi}{2}$,$\frac{\pi}{2}$)，则α+β=（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{3}$或-$\frac{2}{3}\pi$　　C. -$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2}{3}\pi$　　D. -$\frac{2}{3}\pi$

正确答案：D 错因：学生不能准确限制角的范围。

8.　若$\sin\theta+\cos\theta=1$，则对任意实数n，$\sin^n\theta+\cos^n\theta$的取值为（　　）

A. 1　　B. 区间（0，1）

C. $\frac{1}{2^{n-1}}$　　D. 不能确定

解一：设点$(\sin\theta,\ \cos\theta)$，则此点满足

$$\begin{cases}x+y=1\\x^2+y^2=1\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

即$\begin{cases}\sin\theta=0\\\cos\theta=1\end{cases}$或$\begin{cases}\sin\theta=1\\\cos\theta=0\end{cases}$

$\therefore \sin^n\theta+\cos^n\theta=1$

$\therefore$ 选 A

解二：用赋值法，

令 $\sin\theta=0$， $\cos\theta=1$

同样有 $\sin^n\theta+\cos^n\theta=1$

$\therefore$ 选 A

说明：此题极易认为答案 A 最不可能，怎么能会与 n 无关呢？其实这是我们忽略了一个隐含条件 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，导致了错选为 C 或 D。

9. 在 ΔABC 中，$3\sin A+4\cos B=6$，$3\cos A+4\sin B=1$，则 $\angle C$ 的大小为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{5}{6}\pi$　　C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi$　　D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2}{3}\pi$

解：由 $\begin{cases}3\sin A+4\cos B=6\\3\cos A+4\sin B=1\end{cases}$ 平方相加得

$\sin(A+B)=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin C=\frac{1}{2}$

$\therefore C=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi$

若 $C=\frac{5}{6}\pi$

则 $A+B=\frac{\pi}{6}$

$\because 1-3\cos A=4\sin B>0$

$\therefore \cos A<\frac{1}{3}$　　又 $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$

$\therefore A>\frac{\pi}{3}$

$\therefore C\neq\frac{5}{6}\pi$

$\therefore C=\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ 选 A

说明：此题极易错选为 C，条件 $\cos A<\frac{1}{3}$ 比较隐蔽，不易发现。这里提示我们要注意

对题目条件的挖掘。

10． ΔABC 中, A 、B 、C 对应边分别为 a 、b 、c . 若 $a=x$, $b=2$, $B=45°$, 且此三角形有两解, 则 x 的取值范围为（ ）

A. $(2,2\sqrt{2})$ B. $2\sqrt{2}$ C. $(\sqrt{2},+\infty)$ D. $(2,2\sqrt{2}]$

正确答案：A

错因：不知利用数形结合寻找突破口。

11．已知函数 y=sin（ωx+Φ）与直线 y＝$\frac{1}{2}$ 的交点中距离最近的两点距离为 $\frac{\pi}{3}$，那么此函数的周期是（ ）

A $\frac{\pi}{3}$ B π C 2π D 4π

正确答案：B

错因：不会利用范围快速解题。

12. 函数 $y=2\sin(\frac{\pi}{6}-2x)(x\in[0,\ \pi])$ 为增函数的区间是…………………………（ ）

A. $[0,\ \frac{\pi}{3}]$ B. $[\frac{\pi}{12},\ \frac{7\pi}{12}]$ C. $[\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}]$ D. $[\frac{5\pi}{6},\ \pi]$

正确答案：C

错因：不注意内函数的单调性。

13．已知 α , $\beta \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 且 $\cos\alpha+\sin\beta>0$，这下列各式中成立的是（ ）

A. $\alpha+\beta<\pi$ B. $\alpha+\beta>\frac{3\pi}{2}$ C. $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{2}$ D. $\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$

正确答案(D)

错因:难以抓住三角函数的单调性。

14.函数 $y=\sin(3x+\frac{\pi}{3})\cos(x-\frac{\pi}{6})+\cos(3x+\frac{\pi}{3})\cos(x+\frac{\pi}{3})$ 的图象的一条对称轴的方程是（）

A、$x=\frac{\pi}{4}$ B、$x=\frac{\pi}{8}$ C、$x=-\frac{\pi}{4}$ D、$x=-\frac{\pi}{2}$

正确答案 A

错因：没能观察表达式的整体构造，盲目化简导致表达式变繁而无法继续化简。

15． ω是正实数，函数 $f(x)=2\sin\omega x$ 在 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}]$ 上是增函数，那么（ ）

A． $0<\omega\le\frac{3}{2}$ B． $0<\omega\le 2$ C． $0<\omega\le\frac{24}{7}$ D． $\omega\ge 2$

正确答案 A

错因：大部分学生无法从正面解决，即使解对也是利用的特殊值法。

16．在(0，2π)内，使 cos$x$＞sin$x$＞tan$x$ 的成立的 x 的取值范围是　　（　　）

A、　$(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$　　B、　$(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$　　C、（$\frac{3\pi}{2},2\pi$）　　D、$(\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4})$

正确答案：C

17．设 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})$，若在 $x\in\left[0,2\pi\right]$ 上关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有两个不等的实根 x_1,x_2，则 x_1+x_2 为

A、$\frac{\pi}{2}$或$\frac{5\pi}{2}$　　B、$\frac{\pi}{2}$　　C、$\frac{5\pi}{2}$　　D、不确定

正确答案：A

18．△ABC 中，已知 cosA=$\frac{5}{13}$，sinB=$\frac{3}{5}$，则 cosC 的值为（　　）

A、$\frac{16}{65}$　　B、$\frac{56}{65}$　　C、$\frac{16}{65}$或$\frac{56}{65}$　　D、$-\frac{16}{65}$

答案：A

点评：易误选 C。忽略对题中隐含条件的挖掘。

19．在△ABC 中，3sinA+4cosB=6，4sinB+3cosA=1，则∠C 的大小为（　　）

A、$\frac{\pi}{6}$　　B、$\frac{5\pi}{6}$　　C、$\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$　　D、$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

答案：A

点评：易误选 C，忽略 A+B 的范围。

20．设 cos100^0=k，则 tan80^0 是（　　）

A、$\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　　B、$\frac{-\sqrt{1-k^2}}{k}$　　C、$\pm\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　　D、$\pm\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

答案：B

点评：误选 C，忽略三角函数符号的选择。

21．已知角α的终边上一点的坐标为（$\sin\frac{2\pi}{3},\cos\frac{2\pi}{3}$），则角$\alpha$的最小值为（　　　）。

A、$\frac{5\pi}{6}$　B、$\frac{2\pi}{3}$　　C、$\frac{5\pi}{3}$　　D、$\frac{11\pi}{6}$

正解：D

$\tan\alpha=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{3},\therefore\alpha=\frac{5}{6}\pi$或$\alpha=\frac{11}{6}\pi$，而$\sin\frac{2\pi}{3}>0$ $\cos\frac{2\pi}{3}<0$

所以，角α的终边在第四象限，所以选 D，$\alpha=\frac{11}{6}\pi$

误解：$\tan\alpha=\tan\frac{2}{3}\pi,\alpha=\frac{2}{3}\pi$,选 B

22．将函数 $y=f(x)\sin x$ 的图像向右移$\frac{\pi}{4}$个单位后，再作关于 x 轴的对称变换得到的函数

$y=1-2\sin^2 x$ 的图像，则 $f(x)$ 可以是（　　　　）。

A、$-2\cos x$　　B、$2\cos x$　　　C、$-2\sin x$　　　D、$2\sin x$

正解：B

$y=1-2\sin^2 x=\cos 2x$,作关于 x 轴的对称变换得 $y=-\cos 2x$,然后向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得函数 $y=-\cos 2(x+\frac{\pi}{4})=\sin 2x=f(x)\cdot\sin x$ 可得 $f(x)=2\cos x$

误解：未想到逆推，或在某一步骤时未逆推，最终导致错解。

23． A，B，C 是 ΔABC 的三个内角，且 $\tan A,\tan B$ 是方程 $3x^2-5x+1=0$ 的两个实数根，则 ΔABC 是（　　　　）

A、钝角三角形　 B、锐角三角形　　 C、等腰三角形　　 D、等边三角形

正解：A

由韦达定理得：$\begin{cases}\tan A+\tan B=\dfrac{3}{5}\\ \tan A\tan B=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

$$\therefore \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{2}$$

在 ΔABC 中， $\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\frac{5}{2}<0$

$\therefore \angle C$ 是钝角，$\therefore \Delta ABC$ 是钝角三角形。

24．曲线 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数）上的点到两坐标轴的距离之和的最大值是（　）。

A、$\frac{1}{2}$　 B、$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　 C、1　　 D、$\sqrt{2}$

正解：D。

$d=|\cos\theta|+|\sin\theta|$

由于 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ 所表示的曲线是圆，又由其对称性，可考虑 $\theta\in I$ 的情况，即

$d=\sin\theta+\cos\theta$

则 $d=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\therefore d_{\max}=\sqrt{2}$

误解：计算错误所致。

25．在锐角⊿ABC 中，若 $\tan A=t+1$， $\tan B=t-1$，则 t 的取值范围为（　　　）

A、$(\sqrt{2},+\infty)$　B、$(1,+\infty)$　C、$(1,\sqrt{2})$　D、$(-1,1)$

错解: B.

错因:只注意到 $\tan A>0, \tan B>0,$ 而未注意 $\tan C$ 也必须为正.

正解: A.

26. 已知 $\sin\theta=\frac{m-3}{m+5}$，$\cos\theta=\frac{4-2m}{m+5}$（$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$），则 $\tan\theta=$　（C）

A、$\frac{4-2m}{m-3}$　B、$\pm\frac{m-3}{4-2m}$　C、$-\frac{5}{12}$　D、$-\frac{3}{4}$或$-\frac{5}{12}$

错解：A

错因：忽略 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，而不解出 m

正解：C

27. 先将函数 y=sin2x 的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，再将所得图象作关于 y 轴的对称变换，则所得函数图象对应的解析式为　（　）

A. $y=\sin(-2x+\frac{\pi}{3})$　B. $y=\sin(-2x-\frac{\pi}{3})$

C. $y=\sin(-2x+\frac{2\pi}{3})$　D. $y=\sin(-2x-\frac{2\pi}{3})$

错解：B

错因：将函数 y=sin2x 的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度时，写成了 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

正解：D

28. 如果 $\log_{\frac{1}{2}}|x-\frac{\pi}{3}|\geq\log_{\frac{1}{2}}\frac{\pi}{2}$，那么 $\sin x$ 的取值范围是（　）

A. $[-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}]$ B. $[-\frac{1}{2}，1]$ C. $[-\frac{1}{2}，\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2}，1]$ D. $[-\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2})\cup(\frac{\sqrt{3}}{2}，1]$

错解: D.

错因:只注意到定义域 $x\neq\frac{\pi}{3}$,而忽视解集中包含 $x=\frac{2\pi}{3}$.

正解: B.

29. 函数 $y=\sqrt{\sin x\cos x}$ 的单调减区间是（　）

A、$[k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}]$（$k\in z$）　B、$[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3}{4}\pi](k\in z)$

C、$[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{2}](k\in z)$　D、$[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{2}](k\in z)$

答案：D

错解：B

错因：没有考虑根号里的表达式非负。

30．已知$\sin x\cos y=\dfrac{1}{2}$,则$\cos x\sin y$的取值范围是（　　）

A、$[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$　　B、$[-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}]$　　C、$[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}]$　　D、$[-1,1]$

答案：A 设$\cos x\sin y=t$,则$(\sin x\cos y)(\cos x\sin y)=\dfrac{1}{2}t$，可得 sin2x sin2y=2t,由$\left|\sin 2x\sin 2y\right|\le 1$即$\left|2t\right|\le 1\therefore -\dfrac{1}{2}\le t\le \dfrac{1}{2}$。

错解：B、C

错因：将$\sin x\cos y=\dfrac{1}{2}$与$\cos x\sin y=t$相加得$\sin(x+y)=\dfrac{1}{2}+t$由$-1\le \sin(x+y)\le 1$得$-1\le \dfrac{1}{2}+t\le 1$得$-\dfrac{3}{2}\le t\le \dfrac{1}{2}$选 B，相减时选 C，没有考虑上述两种情况均须满足。

31．在锐角ΔABC 中，若 C=2B，则$\dfrac{c}{b}$的范围是（　　）

A、（0，2）　B、$(\sqrt{2},2)$　C、$(\sqrt{2},\sqrt{3})$　D、$(1,\sqrt{3})$

答案：C

错解：B

错因：没有精确角 B 的范围

32．函数$y=\sin x$和$y+\tan x$的图象在$\left[-2\pi,2\pi\right]$上交点的个数是　　（　　）

A、3　　B、5　　C、7　　D、9

正确答案：B

错误原因：在画图时，0＜x＜$\dfrac{\pi}{2}$时，$\tan x$＞$\sin x$意识性较差。

33．在△ABC 中，$3\sin A+4\cos B=6,4\sin B+3\cos A=1,$则∠C 的大小为（　　）

A、30°　　B、150°　　C、30°或 150°　　D、60°或 150°

正确答案：A

错误原因：易选 C，无讨论意识，事实上如果 C=150°则 A=30°∴$\sin A=\dfrac{1}{2}$，∴$3\sin A+4\cos B$＜$\dfrac{11}{2}$＜6 和题设矛盾

34．函数$f\left(x\right)=\left|\sin x+\cos x\right|+\left|\sin x-\cos x\right|$的最小正周期为　　（　　）

A、2π　　B、π　　C、$\dfrac{\pi}{2}$　　D、$\dfrac{\pi}{4}$

正确答案：C

错误原因：利用周期函数的定义求周期，这往往是容易忽视的，本题直接检验得$f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(x\right),$故$T=\dfrac{\pi}{2}$

35．函数$y=\sin x\left(1+\tan x\cdot\tan\frac{x}{2}\right)$的最小正周期为　　　　（　　　）

A、π　　　　　B、2π　　　　　C、$\frac{\pi}{2}$　　　　　D、$\frac{3\pi}{2}$

正确答案：B

错误原因：忽视三角函数定义域对周期的影响。

36．已知奇函数$f(x)$在$[-1,0]$上为等调减函数，又α，β为锐角三角形内角，则（　　）

A、f(cosα)＞ f(cosβ)　　　　　B、f(sinα)＞ f(sinβ)

C、f(sinα)＜f(cosβ)　　　　　D、f(sinα)＞ f(cosβ)

正确答案：（C）

错误原因：综合运用函数的有关性质的能力不强。

37．设$\omega>0$,函数$f(x)=\sin\omega x$在$[-\pi/3,\pi/4]$上为增函数，那么ω的取值范围为（　　）

A、$0>\omega\le 2$　　B、$0>\omega\le 3/2$　　C、$0>\omega\le 24/7$　　D、$\omega\ge 2$

正确答案：(B)

错误原因：对三角函数的周期和单调性之间的关系搞不清楚。

二填空题：

1．已知方程$x^2+4ax+3a+1=0$（a 为大于 1 的常数）的两根为$\tan\alpha$，$\tan\beta$，

且α、$\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$的值是________________.

错误分析：忽略了隐含限制$\tan\alpha,\tan\beta$是方程$x^2+4ax+3a+1=0$的两个负根，从而导致错误.

正确解法：$\because a>1$　$\therefore \tan\alpha+\tan\beta=-4a<0$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=3a+1>o$

$\therefore\tan\alpha,\tan\beta$是方程$x^2+4ax+3a+1=0$的两个负根

又$\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$　　$\therefore\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 即$\frac{\alpha+\beta}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

由$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{-4a}{1-(3a+1)}=\frac{4}{3}$可得$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=-2.$

答案: -2 .

2．已知$5\cos^2\alpha+4\cos^2\beta=4\cos\alpha$,则$\cos^2\alpha+\cos^2\beta$的取值范围是______________.错

误分析:由$5\cos^2\alpha+4\cos^2\beta=4\cos\alpha$得$\cos^2\beta=\cos\alpha-\dfrac{5}{4}\cos^2\alpha$代入$\cos^2\alpha+\cos^2\beta$中,化为关于$\cos\alpha$的二次函数在$[-1,1]$上的范围,而忽视了$\cos\alpha$的隐含限制,导致错误.

答案: $\left[0,\dfrac{16}{25}\right]$.

略解: 由$5\cos^2\alpha+4\cos^2\beta=4\cos\alpha$得$\cos^2\beta=\cos\alpha-\dfrac{5}{4}\cos^2\alpha$　　(1)

$\because \cos^2\beta\in[0,1]$　　$\therefore \cos\alpha\in\left[0,\dfrac{4}{5}\right]$

将（1）代入$\cos^2\alpha+\cos^2\beta$得$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=-\dfrac{1}{4}(\cos\alpha-2)^2+1\in\left[0,\dfrac{16}{25}\right]$.

3．若$A\in(0,\pi)$,且$\sin A+\cos A=\dfrac{7}{13}$,则$\dfrac{5\sin A+4\cos A}{15\sin A-7\cos A}=$______________.

错误分析:直接由$\sin A+\cos A=\dfrac{7}{13}$,及$\sin^2 A+\cos^2 A=1$求$\sin A,\cos A$的值代入求得两解,忽略隐含限制$A\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$出错.

答案: $\dfrac{8}{43}$.

4．函数$f(x)=a\sin x+b$的最大值为3，最小值为2，则$a=$______，$b=$_______。

解：若$a>0$

则$\begin{cases}a+b=3\\-a+b=2\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{5}{2}\end{cases}$

若$a<0$

则$\begin{cases}-a+b=3\\a+b=2\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{5}{2}\end{cases}$

说明：此题容易误认为$a>0$，而漏掉一种情况。这里提醒我们考虑问题要周全。

5．若 Sin$\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{5}$　　$\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{4}{5}$，则α角的终边在第_____象限。

正确答案：<u>四</u>

错误原因：注意角$\dfrac{\alpha}{2}$的范围，从而限制α的范围。

6. 在△ABC中，已知 A、B、C成等差数列，则$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}+\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$的值为________.

正确答案：$\sqrt{3}$

错因：看不出是两角和的正切公式的变形。

7．函数 $y=\sin x(\sin x+\cos x)$ $(x\in[0,\frac{\pi}{2}])$ 的值域是______________.

正确答案：$\left[0,\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$

8．若函数 $y=a\cos x+b$ 的最大值是 1，最小值是-7，则函数 $y=a\cos x+b\sin x$ 的最大值是_________________．正确答案：5

9．定义运算 a∗b 为: $a*b=\begin{cases}a(a\le b)\\b(a>b)\end{cases}$,例如，$1*2=1$,则函数 $f(x)=\sin x*\cos x$ 的值域为___________．正确答案：$[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}]$

10．若$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，α是第二象限角，则$\tan\frac{\alpha}{2}$=_________

答案：5

点评：易忽略$\frac{\alpha}{2}$的范围，由$\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$得$\tan\frac{\alpha}{2}$=5 或$\frac{1}{5}$。

11．设ω>0，函数 f(x)=2sinωx 在$[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}]$上为增函数，那么ω的取值范围是_____

答案：0<ω≤$\frac{2}{3}$

点评：$[-\frac{\pi\omega}{3},\frac{\pi\omega}{4}]\subseteq[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

12．在△ABC 中，已知 a=5，b=4，cos(A－B)=$\frac{31}{32}$，则 cosC=__________

答案：$\frac{1}{8}$

点评：未能有效地运用条件构造三角形运用方程思想实施转化。

13．在ΔABC中，已知a，b，c 是角 A、B、C 的对应边，则①若$a>b$，则$f(x)=(\sin A-\sin B)\cdot x$在 R 上是增函数；②若$a^2-b^2=(a\cos B+b\cos A)^2$，则ΔABC 是$Rt\Delta$；③$\cos C+\sin C$的最小值为$-\sqrt{2}$；④若$\cos A=\cos 2B$，则 A=B；⑤若

$(1+\tan A)(1+\tan B)=2$，则 $A+B=\frac{3}{4}\pi$，其中错误命题的序号是_____。

正解：错误命题③⑤。

① $a>b\Leftrightarrow \sin A>\sin B,\therefore \sin A-\sin B>0$

$\therefore f(x)=(\sin A-\sin B)x$在R上是增函数。

②$a^2-b^2=c^2,a^2=b^2+c^2,$则ΔABC是$Rt\Delta$。

③$\sin c+\cos c=\sqrt{2}\sin(c+\frac{\pi}{4}),$当$\sin(c+\frac{\pi}{4})=-1$时最小值为$-\sqrt{2},$

显然$0<c<\pi,$得不到最小值$-\sqrt{2}$。

④$\cos 2A=\cos 2B\Rightarrow i>\quad 2A=2B\quad A=B$

$ii>\qquad 2A=2\pi-2B,A=\pi-B,A+B=\pi$ (舍)　，$\therefore A=B$。

⑤$1+\tan A+\tan B+\tan A\cdot\tan B=2,1-\tan A\cdot\tan B=\tan A+\tan B$

$\therefore\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=1,$ 即$\tan(A+B)=1,\therefore A+B=\frac{\pi}{4}$

$\therefore$错误命题是③⑤。

误解：③④⑤中未考虑$0<C<\pi$，④中未检验。

14．已知$\tan\alpha=\sqrt{3}(1+m)$，且$\sqrt{3}(\tan\alpha,\tan\beta+m)+\tan\beta=0,\alpha,\beta$为锐角，则$\alpha+\beta$的值为_____。

正解：60°，令$m=0,$得$\alpha=60^\circ,$代入已知，可得$\beta=0^\circ,\therefore\alpha+\beta=60^\circ$

误解：通过计算求得$\alpha+\beta,$计算错误.

15．给出四个命题：①存在实数α，使$\sin\alpha\cos\alpha=1$；②存在实数α，使$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3}{2}$；③$y=\sin(\frac{5\pi}{2}-2x)$是偶函数；④$x=\frac{\pi}{8}$是函数$y=\sin(2x+\frac{5\pi}{4})$的一条对称轴方程；⑤若$\alpha,\beta$是第一象限角，且$\alpha>\beta$，则$\sin\alpha>\sin\beta$。其中所有的正确命题的序号是_____。

正解：③④

① $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}],\therefore\sin\alpha\cos\alpha=1$不成立。

② $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}],\frac{3}{2}\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}],\therefore$不成立。

③ $y=\sin(\frac{5\pi}{2}-2x)=\sin(\frac{\pi}{2}-2x)=\cos 2x$是偶函数，成立。

④ 将 $x=\frac{\pi}{8}$ 代入 $2x+\frac{5\pi}{4}$ 得 $\frac{3\pi}{2}$ $,\therefore\ x=\frac{\pi}{8}$ 是对称轴，成立。

⑤ 若 $\alpha=390^\circ$，$\beta=60^\circ,\alpha>\beta,$ 但 $\sin\alpha<\sin\beta$，不成立。

误解：①②没有对题目所给形式进行化简，直接计算，不易找出错误。

⑤没有注意到第一象限角的特点，可能会认为是 $(0^\circ,90^\circ)$ 的角，从而根据 $y=\sin x$ 做出了错误的判断。

16．函数 $y=|\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{1}{3}|$ 的最小正周期是_____________

错解：$\frac{\pi}{2}$

错因：与函数 $y=|\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的最小正周期的混淆。

正解：π

17．设 $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$ =$\tan\theta-\sec\theta$ 成立，则 θ 的取值范围是______________

错解：$\theta\in[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi]$

错因：由 $\tan\theta-\sec\theta\ge 0$ 不考虑 $\tan\theta,\sec\theta$ 不存在的情况。

正解：$\theta\in(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi)$

18．①函数 $y=\tan x$ 在它的定义域内是增函数。

②若 α,β 是第一象限角，且 $\alpha>\beta,$ 则 $\tan\alpha>\tan\beta$。

③函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 一定是奇函数。

④函数 $y=\left|\cos(2x+\frac{\pi}{3})\right|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$。

上述四个命题中，正确的命题是___④____

错解：①②

错因：忽视函数 $y=\tan x$ 是一个周期函数

正解：④

19 函数 f(x)= $\frac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ 的值域为_____________。

错解：$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right]$

错因：令 $t=\sin x+\cos x$ 后忽视 $t\ne -1,$ 从而 $g(t)=\frac{t-1}{2}\ne -1$

正解：$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2},-1\right)\cup\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right]$

20．若 $2\sin^2\alpha+\sin^2\beta=3\sin\alpha$,则$\sin^2\alpha+\sin^2\beta$ 的取值范围是_________

错解：$[-4,2]$

错因：由$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=-\sin^2\alpha+3\sin\alpha-1,(1)$ 其中$-1\le\sin\alpha\le 1$，得错误结果；由

$0\le\sin^2\beta=3\sin\alpha-2\sin^2\alpha\le 1$

得$\sin\alpha=1$或$0\le\sin\alpha\le\frac{1}{2}$结合（1）式得正确结果。

正解：$[0，\frac{5}{4}]\cup\{2\}$

21.关于函数 $f(x)=4\sin(2x+\frac{\pi}{3})(x\in R)$ 有下列命题，①y=f(x)图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称 ② y=f(x)的表达式可改写为 $y=4\cos(2x-\frac{\pi}{6})$ ③ y=f(x)的图象关于点 $(-\frac{\pi}{6},0)$ 对称 ④由 $f(x_1)=f(x_2)=0$可得x_1-x_2 必是 π 的整数倍。其中正确命题的序号是________。

答案：②③

错解：②③④

错因：忽视 f(x) 的周期是 π，相邻两零点的距离为$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$。

22．函数 $y=2\sin(-x)$ 的单调递增区间是_________。

答案：$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi](k\in z)$

错解：$[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{1}{2}\pi](k\in z)$

错因：忽视这是一个复合函数。

23．已知$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$，且$\sqrt{3}(\tan\alpha\cdot\tan\beta+C)+\tan\alpha=0$($C$为常数)，那么 $\tan\beta=$__________。

正确答案：$\sqrt{3}(1+C)$

错误原因：两角和的正切公式使用比较呆板。

24． 函数$y=\sin x(\sin x+\cos x)\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$的值域是_________________。

正确答案：$\left[0,\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$

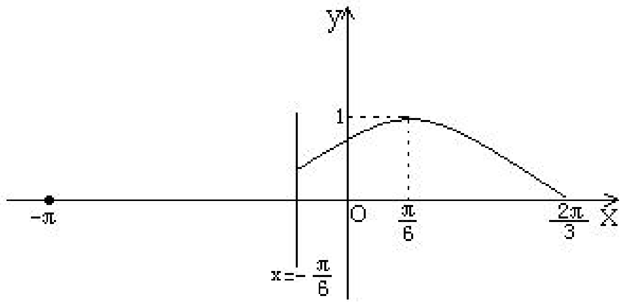
错误原因：如何求三角函数的值域，方向性不明确

三、解答题：

1. 已知定义在区间$[-\pi,\ \frac{2}{3}\pi]$ 上的函数 y=f(x)的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$对称，当 $x\in[-\frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi]$时，函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\ \omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$，其图象如图所示。

(1)求函数 y=f(x)在$[-\pi,\ \frac{2}{3}\pi]$的表达式;

(2)求方程 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$的解。



解：(1)由图象知 A=1，$T=4(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6})=2\pi$，

$\omega=\frac{2\pi}{T}=1$

在 $x\in[-\frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3}]$时

将$(\frac{\pi}{6},\ 1)$代入 f(x)得

$f(\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{6}+\varphi)=1$

$\because -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$

∴在$[-\frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3}]$时

$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$

∴y=f(x)关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$对称

∴在$[-\pi,\ -\frac{\pi}{6}]$时

$f(x)=-\sin x$

综上 $f(x)=\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{3}) & x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]\\ -\sin x & x\in[-\pi,-\frac{\pi}{6}]\end{cases}$

(2) $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

在区间 $[-\frac{\pi}{6}$，$\frac{2\pi}{3}]$ 内

可得 $x_1=\frac{5x}{12}$　　$x_2=-\frac{\pi}{12}$

∵ $y=f(x)$ 关于 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称

∴ $x_3=-\frac{\pi}{4}$　　$x_4=-\frac{3\pi}{4}$

∴ $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解为 $x\in\{-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\}$

2． 求函数 $y=\sin^4 x+\cos^4 x-\frac{3}{4}$ 的相位和初相。

解：$y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-\frac{3}{4}$

$$=-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{4}$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\cos 4x$$
$$=\frac{1}{4}\sin(4x+\frac{\pi}{2})$$

$\therefore$ 原函数的相位为 $4x+\frac{\pi}{2}$，初相为 $\frac{\pi}{2}$

说明：部分同学可能看不懂题目的意思，不知道什么是相位，而无从下手。应将所给函数式变形为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0$，$\omega>0)$ 的形式（注意必须是正弦）。

3． 若 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，求 $\sin\beta\cos\alpha$ 的取值范围。

解：令 $\alpha=\sin\beta\cos\alpha$，则有

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2}+a=\sin(\alpha+\beta) \\ \frac{1}{2}-a=\sin(\alpha-\beta) \end{cases} \quad (1)$$

$$\therefore \begin{cases} -1\le \frac{1}{2}+a\le 1 \\ -1\le \frac{1}{2}-a\le .1 \end{cases} \quad (2)$$

$\therefore -\frac{1}{2}\le a\le \frac{1}{2}$

说明：此题极易只用方程组（1）中的一个条件，从而得出$-\frac{3}{2}\le a\le \frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}\le a\le \frac{3}{2}$。原因是忽视了正弦函数的有界性。另外不等式组（2）的求解中，容易让两式相减，这样做也是错误的，因为两式中的等号成立的条件不一定相同。这两点应引起我们的重视。

4．求函数$y=\sqrt{16-x^2}+\sqrt{\sin x}$的定义域。

解：由题意有

$$\begin{cases} 2k\pi\le x\le 2k\pi+\pi \\ -4\le x\le 4 \end{cases} \quad (*)$$

当$k=-1$时，$-2\pi\le x\le -\pi$；
当$k=0$时，$0\le x\le \pi$；
当$k=1$时，$2\pi\le x\le 3\pi$

$\therefore$函数的定义域是$[-4，-\pi]\cup[0，\pi]$

说明：可能会有部分同学认为不等式组（*）两者没有公共部分，所以定义域为空集，原因是没有正确理解弧度与实数的关系，总认为二者格格不入，事实上弧度也是实数。

5．已知$2\alpha+\beta=\pi$，求$y=\cos\beta-6\sin\alpha$的最小值及最大值。

解：$\because 2\alpha+\beta=\pi$

$\therefore \beta=\pi-2\alpha$

$\therefore y=2\sin^2\alpha-6\sin\alpha-1=2(\sin\alpha-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{2}$

令$t=\sin\alpha$

则$|t|\le 1$

$\therefore y=2(t-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{2}$

而对称轴为$t=\frac{3}{2}$

$\therefore$当$t=-1$时，$y_{\max}=7$；

当$t=1$时，$y_{\min}=-5$

说明：此题易认为$\sin\alpha=\dfrac{3}{2}$时，$y_{\min}=\dfrac{-11}{2}$，最大值不存在，这是忽略了条件$|\sin\alpha|\le 1$，$\dfrac{3}{2}$不在正弦函数的值域之内。

6．若$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，求函数$y=4tgx+9ctg^2x$的最大值。

解：$\because 0<x<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore tgx>0$

$$\begin{aligned}\therefore y&=4tgx+9ctg^2x\\&=2tgx+2tgx+9ctg^2x\\&\ge 3\sqrt[3]{2tgx\cdot 2tgx\cdot 9ctg^2x}\\&=3\sqrt[3]{36}\end{aligned}$$

当且仅当$2tgx=9ctg^2x$

即$tgx=\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}}$时，等号成立

$\therefore y_{\min}=3\sqrt[3]{36}$

说明：此题容易这样做：$y=4tgx+9ctg^2x=tgx+3tgx+9ctg^2x\ge$ $3\sqrt[3]{tgx\cdot 3tgx\cdot 9ctg^2x}=9$，但此时等号成立的条件是$tgx=3tgx=9ctg^2x$，这样的$x$是不存在的。这是忽略了利用不等式求极值时要平均分析的原则。

7．　求函数$f(x)=\dfrac{2tgx}{1-tg^2x}$的最小正周期。

解：函数$f(x)=\dfrac{2tgx}{1-tg^2x}$的定义域要满足两个条件；

tgx要有意义且$tg^2x-1\ne 0$

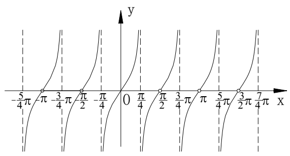
$\therefore x\ne k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，且$x\ne\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ $(k\in Z)$

当原函数式变为$f(x)=tg2x$时，

此时定义域为$x\ne\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}(k\in Z)$

显然作了这样的变换之后，定义域扩大了，两式并不等价

所以周期未必相同，那么怎么求其周期呢？首先作出 $y=tg2x$ 的图象：



而原函数的图象与 $y=tg2x$ 的图象大致相同

只是在上图中去掉 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in Z)$ 所对应的点

从去掉的几个零值点看，原函数的周期应为 π

说明：此题极易由 $y=tg2x$ 的周期是 $\dfrac{\pi}{2}$ 而得出原函数的周期也是 $\dfrac{\pi}{2}$，这是错误的，原因正如上所述。那么是不是说非等价变换周期就不同呢？也不一定，如 1993 年高考题：函数 $y=\dfrac{1-tg^2 2x}{1+tg^2 2x}$ 的最小正周期是（　　）。A. $\dfrac{\pi}{4}$　B. $\dfrac{\pi}{2}$　C. π　D. 2π。此题就可以由 $y=\cos 4x$ 的周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 而得原函数的周期也是 $\dfrac{\pi}{2}$。但这个解法并不严密，最好是先求定义域，再画出图象，通过空点来观察，从而求得周期。

8．已知 $\mathrm{Sin}\,\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　$\mathrm{Sin}\,\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，且α，β为锐角，求α＋β的值。

正确答案：$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$

错误原因：要挖掘特征数值来缩小角的范围

9．求函数 $y=\mathrm{Sin}(\dfrac{\pi}{4}—3x)$的单调增区间：

正确答案：增区间$[\dfrac{2}{3}k\pi+\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2}{3}k\pi+\dfrac{7}{12}\pi]$（$k\in Z$）

错误原因：忽视 $t=\dfrac{\pi}{4}—3x$ 为减函数

10．求函数 $y=\dfrac{\tan x}{1-\tan^2 x}$ 的最小正周期

正确答案：最小正周期π

错误原因：忽略对函数定义域的讨论。

11．已知 $\mathrm{Sin}x+\mathrm{Sin}y=\dfrac{1}{3}$，求 $\mathrm{Sin}y—\cos^2x$ 的最大值。

正确答案：$\dfrac{4}{9}$

错误原因：挖掘隐含条件

12．（本小题满分 12 分）

设 $f(x)=2(\log_2 x)^2+2a\log_2\dfrac{1}{x}+b$,已知 $x=\dfrac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 有最小值-8。

(1)、求 a 与 b 的值。（2）求满足 $f(x)>0$ 的 x 的集合 A。

错解：$f(x)=2(\log_2 x-\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{2}$，当$\begin{cases}\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\\ b-\frac{a^2}{2}=-8\end{cases}$时，得$\begin{cases}a=1\\ b=-\frac{15}{2}\end{cases}$

错因：没有注意到应是$\log_2\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$时，$f(x)$取最大值。

正解：$f(x)=2(\log_2 x-\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{2}$，当$\begin{cases}\log_2\frac{1}{2}=\frac{a}{2}\\ b-\frac{a^2}{2}=-8\end{cases}$时，得$\begin{cases}a=-2\\ b=-6\end{cases}$

13．求函数$f(x)=\sin 2x+2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+x)+3$的值域

答案：原函数可化为 $f(x)=\sin 2x+2(\cos x-\sin x)+3,$ 设 $\cos x-\sin x=t,t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 则 $\sin 2x=1-t^2$ 则 $f(x)=-t^2+2t+4=-(t-1)^2+5\ \therefore 当t=1时,f(x)_{\max}=5$，

$当t=-\sqrt{2}时,f(x)\min=2-2\sqrt{2}$

错解：$(-\infty\ ,5]$

错因：不考虑换元后新元 t 的范围。

14．已知函数 f(x)=－$\sin^2$x+sinx+a，（1）当 f(x)=0 有实数解时，求 a 的取值范围；（2）若 x∈R，有 1≤f(x)≤$\frac{17}{4}$，求 a 的取值范围。

解：（1）f(x)=0，即 a=$\sin^2$x－sinx=(sinx－$\frac{1}{2}$)^2－$\frac{1}{4}$

∴当 sinx=$\frac{1}{2}$时，a_{min}=$\frac{1}{4}$，当 sinx=－1 时，a_{max}=2，

∴a∈[$-\frac{1}{4}$，2]为所求

（2）由 1≤f(x)≤$\frac{7}{4}$得$\begin{cases}a\le\sin^2 x-\sin x+\frac{17}{4}\\ a\ge\sin^2 x-\sin x+1\end{cases}$

∵ u_1=$\sin^2$x－sinx+$\frac{17}{4}=(\sin x-\frac{1}{2})^2$+4≥4

u_2=$\sin^2$x－sinx+1=$(\sin x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$≤3

∴ 3≤a≤4

点评：本题的易错点是盲目运用“△”判别式。

15．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\Phi)(\omega>0,0\leqslant\Phi\leqslant\pi)$ 是 R 上的偶函数，其图像关于点 M $(\frac{3}{4}\pi,0)$ 对称，且在区间[0，$\frac{\pi}{2}$]上是单调函数，求 Φ 和 ω 的值。

正解：由 $f(x)$ 是偶函数，得 $f(-x)=f(x)$

故 $\sin(-\omega x+\Phi)=\sin(\omega x+\Phi)$,$\therefore -\cos\Phi\sin\omega x=\cos\Phi\sin\omega x$

对任意 x 都成立，且 $\omega>0,\therefore \cos\Phi=0$

依题设 0≤$\Phi\leqslant\pi$，$\therefore \Phi=\frac{\pi}{2}$

由 $f(x)$ 的图像关于点 M 对称，得 $f(\frac{3}{4}\pi-x)=-f(\frac{3}{4}\pi+x)$

取 $x=0$得$f(\frac{3}{4}\pi)=-f(\frac{3}{4}\pi),\therefore f(\frac{3}{4}\pi)=0$

$\because f(\frac{3}{4}\pi)=\sin(\frac{3\omega x}{4}+\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{3\omega x}{4}),\therefore \cos(\frac{3\omega x}{4})=0$

又 $\omega>0$，得 $\frac{3\omega x}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k=0,1,2......$

$\therefore \omega=\frac{2}{3}(2k+1),k=0,1,2...$

当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{2}{3},f(x)=\sin(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{2})$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上是减函数。

当 $k=1$ 时，$\omega=2,f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{2})$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上是减函数。

当 $k\geqslant2$ 时，$\omega=\frac{10}{3},f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{2})$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上不是单调函数。

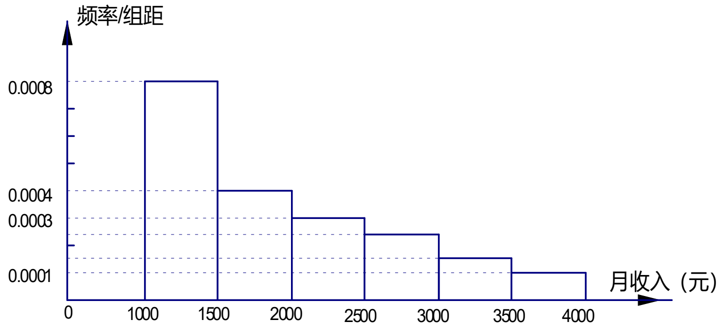
所以，综合得 $\omega=\frac{2}{3}$ 或 $\omega=2$。

误解：①常见错误是未对 K 进行讨论，最后 ω 只得一解。

②对题目条件在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上是单调函数，不进行讨论，故对 $\omega\geqslant\frac{10}{3}$ 不能排除。

补充习题：

1．右图是某市有关部门根据对某地干部的月收入情况调查后画出的样本频率分布直方图，已知图中第一组的频数为4000. 请根据该图提供的信息解答下列问题：（图中每组包括左端点，不包括右端点，如第一组表示收入在 $[1000,1500)$ ）



（1）求样本中月收入在 $[2500,3500)$ 的人数；

（2）为了分析干部的收入与年龄、职业等方面的关系，必须从样本的各组中按月收入再用分层抽样方法抽出100人作进一步分析，则月收入在$[1500,2000)$的这段应抽多少人？

（3）试估计样本数据的中位数.

解：（1）∵月收入在$[1000,1500)$的频率为$0.0008\times 500=0.4$，且有4000人

∴样本的容量$n=\dfrac{4000}{0.4}=10000$

月收入在$[1500,2000)$的频率为$0.0004\times 500=0.2$

月收入在$[2000,2500)$的频率为$0.0003\times 500=0.15$

月收入在$[3500,4000)$的频率为$0.0001\times 500=0.05$

∴月收入在$[2500,3500)$的频率为；$1-(0.4+0.2+0.15+0.05)=0.2$

∴样本中月收入在$[2500,3500)$的人数为：$0.2\times 10000=2000$

（2）∵月收入在$[1500,2000)$的人数为：$0.2\times 10000=2000$，

∴再从10000人用分层抽样方法抽出100人，则月收入在$[1500,2000)$的这段应抽取$100\times\dfrac{2000}{10000}=20$（人）

（3）由（1）知月收入在$[1000,2000)$的频率为：$0.4+0.2=0.6>0.5$

∴样本数据的中位数为：$1500+\dfrac{0.5-0.4}{0.0004}=1500+250=1750$（元）

2．先后随机投掷2枚正方体骰子，其中x表示第1枚骰子出现的点数，y表示第2枚骰子出现的点数.

（1）求点$P(x,y)$在直线$y=x-1$上的概率；

（2）求点$P(x,y)$满足$y^2<4x$的概率.

解：（1）每颗骰子出现的点数都有6种情况，

所以基本事件总数为$6\times 6=36$个.

记“点$P(x,y)$在直线$y=x-1$上”为事件A，A有5个基本事件：

$A=\{(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5)\}$，

$\therefore P(A)=\frac{5}{36}$.

（2）记“点$P(x,y)$满足$y^2<4x$”为事件B，则事件B有17个基本事件:

当$x=1$时，$y=1$;当$x=2$时，$y=1,2$；

当$x=3$时，$y=1,2,3$；当$x=4$时，$y=1,2,3$;

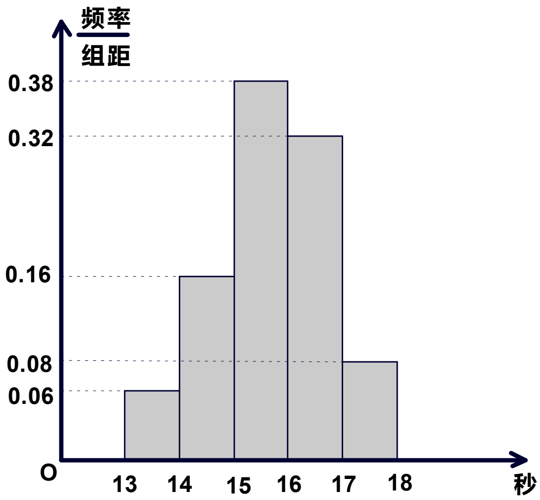
当$x=5$时，$y=1,2,3,4$；当$x=6$时，$y=1,2,3,4$.

$\therefore P(B)=\frac{17}{36}$.

3．某班50名学生在一次百米测试中，成绩全部介于13秒与18秒之间，将测试结果按如下方式分成五组：每一组$[13,14)$；第二组$[14,15)$，…，第五组$[17,18]$．下图是按上述分组方法得到的频率分布直方图.

（1）若成绩大于或等于14秒且小于16秒认为良好，求该班在这次百米测试中成绩良好的人数；

（2）设m、n表示该班某两位同学的百米测试成绩，且已知$m,n\in[13,14)\cup[17,18]$.求事件“$|m-n|>1$”的概率.



解:（1）由频率分布直方图知，成绩在$[14,16)$内的人数为：$50\times0.16+50\times0.38=27$（人）

所以该班成绩良好的人数为27人.

（2）由频率分布直方图知，成绩在$[13,14)$的人数为$50\times0.06=3$人，设为x、y、z；

成绩在$[17,18)$ 的人数为$50\times0.08=4$人，设为A、B、C、D.

若$m,n\in[13,14)$时，有xy,xz,yz 3种情况；

若$m,n\in[17,18)$时，有AB,AC,AD,BC,BD,CD 6种情况；

若m,n分别在$[13,14)$和$[17,18)$内时，

	A	B	C	D
x	xA	xB	xC	xD
y	yA	yB	yC	yD
z	zA	zB	zC	zD

共有12种情况.

所以基本事件总数为21种，事件“$|m-n|>1$”所包含的基本事件个数有12种.

$\therefore P$（$|m-n|>1$）$=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$.

4．已知点 $A(1,\ 0), B(0,\ 1), C(2\sin\theta,\ \cos\theta)$.

(1) 若 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$，求 $\tan\theta$ 的值;

(2) 若 $(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}=1$, 其中 O 为坐标原点，求 $\sin 2\theta$ 的值.

解：(1)$\because\ A(1,\ 0), B(0,\ 1), C(2\sin\theta,\ \cos\theta)$,

$\therefore \overrightarrow{AC}=(2\sin\theta-1,\ \cos\theta),\ \overrightarrow{BC}=(2\sin\theta,\ \cos\theta-1)$.

$\because |\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$,

$\therefore \sqrt{(2\sin\theta-1)^2+\cos^2\theta}=\sqrt{(2\sin\theta)^2+(\cos\theta-1)^2}$.

化简得 $2\sin\theta=\cos\theta$.

$\because \cos\theta\neq 0$（若 $\cos\theta=0$, 则 $\sin\theta=\pm 1$，上式不成立），

$\therefore \tan\theta=\frac{1}{2}$.

(2) $\because \overrightarrow{OA}=(1,\ 0), \overrightarrow{OB}=(0,\ 1), \overrightarrow{OC}=(2\sin\theta,\ \cos\theta)$,

$\therefore \overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=(1,\ 2)$.

$\because (\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}=1$,

$\therefore 2\sin\theta+2\cos\theta=1$.

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$.

$\therefore (\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{4}$.

$\therefore \sin 2\theta=-\frac{3}{4}$.

5.已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$.

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期;

（2）用五点法画出函数 $y=f(x)$在一个周期内的图象;

（3）若 $x\in[0,\frac{\pi}{3}]$，求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值；

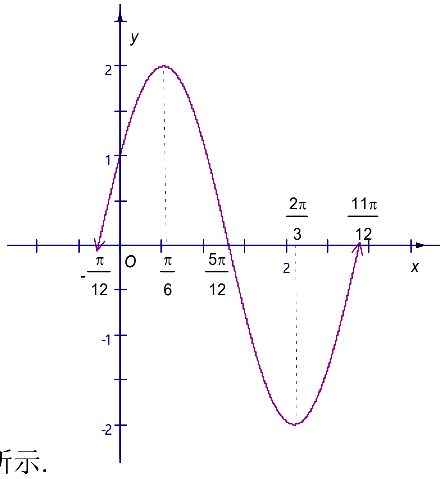
（4）若 $f(x)=-\frac{4}{5},x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，求 $\sin 2x$ 的值.

解：（1）$\because f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（2）列表：

x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
$2x+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0	2	0	-2	0



描点，连线，得函数 $y=f(x)$ 在一个周期内的图象如图所示.

（3）$\because x\in[0,\frac{\pi}{3}]$，$\therefore \frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$，

$\therefore$ 当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，函数 $f(x)$ 有最大值 2.

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 或 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，即 $x=0$ 或 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 有最小值 1.

（4）由已知得 $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4}{5}$，得 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2}{5}<0$.

$\because x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore \frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$.

$\therefore \pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$.

$\therefore \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}=-\sqrt{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=-\frac{\sqrt{21}}{5}$.

$\therefore \sin 2x=\sin\left[\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$

$=\left(-\frac{2}{5}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{10}$.

6．已知向量$\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$.

（1）求$\cos(\alpha-\beta)$的值 .

（2）若$-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，且$\sin\beta=-\dfrac{5}{13}$，求$\sin\alpha$的值.

解：（1）∵ $\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=1$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

$$=1+1-2\cos(\alpha-\beta)$$

∵ $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=\dfrac{4}{5}$

∴ $2-2\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{4}{5}$ 得 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}$.

（2）∵$-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ ∴$0<\alpha<\pi$.

由 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}$， 得$\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{4}{5}$.

由 $\sin\beta=-\dfrac{5}{13}$ ， 得$\cos\beta=\dfrac{12}{13}$.

∴ $\sin\alpha=\sin\left[(\alpha-\beta)+\beta\right]=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\times(-\frac{5}{13})=\frac{33}{65}.$$

7. 在△ABC中，$\tan A=\dfrac{1}{4}$，$\tan B=\dfrac{3}{5}$.

(1) 求角C的大小;

(2) 若△ABC最长边的长为 $\sqrt{17}$，求△ABC最短边的长.

解：（1） ∵$C=\pi-(A+B)$， ∴$\tan C=-\tan(A+B)=-\dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{5}}{1-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{5}}=-1$.

∵$0<C<\pi$，∴$C=\dfrac{3}{4}\pi$.

（2）∵$C=\dfrac{3}{4}\pi$，∴AB边最长，即$AB=\sqrt{17}$.

∵$\tan A<\tan B$，A，$B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$， ∴角$A$最小，$BC$边为最短边.

由$\begin{cases}\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{1}{4}\\ \sin^2 A+\cos^2 A=1\end{cases}$ 且$A\in(0，\dfrac{\pi}{2})$，解得$\sin A=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

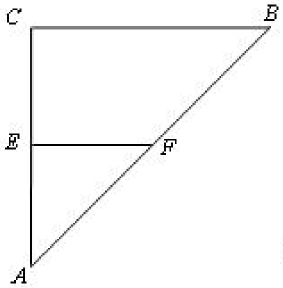
由正弦定理得$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}$， 得$BC=AB\cdot\dfrac{\sin A}{\sin C}=\sqrt{2}$．

∴最短边的长$BC=\sqrt{2}$．

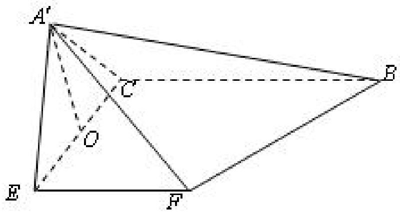
8．如图（1），ΔABC是等腰直角三角形，$AC=BC=4$，E、F分别为AC、AB的中点，将ΔAEF沿EF折起，使A'在平面$BCEF$上的射影O恰为EC的中点，得到图（2）.

（1）求证：$EF\perp A'C$；

（2）求三棱锥$F-A'BC$的体积.



图（1）



图（2）

解：（1）证法一：在ΔABC中，EF是等腰直角ΔABC的中位线，

$\therefore EF\perp AC$

在四棱锥$A'-BCEF$中，$EF\perp A'E$，$EF\perp EC$，$\therefore EF\perp$平面$A'EC$，

又$A'C\subset$平面$A'EC$，$\therefore EF\perp A'C$

证法二：同证法一得$EF\perp EC$，$\therefore A'O\perp EF$ $\therefore EF\perp$平面$A'EC$，

又$A'C\subset$平面$A'EC$，$\therefore EF\perp A'C$

（2）在直角梯形$EFBC$中，$EC=2, BC=4$，$\therefore S_{\Delta FBC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot EC=4$．

$\because A'O$垂直平分EC，$\therefore A'O=\sqrt{A'E^2-EO^2}=\sqrt{3}$．

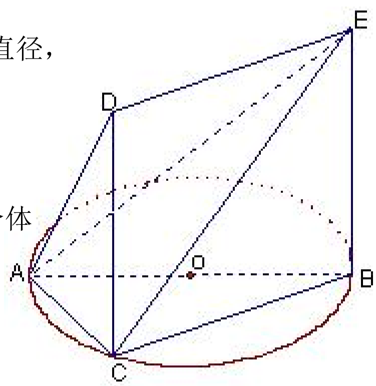
$\therefore V_{F-A'BC}=V_{A'-FBC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta FBC}\cdot A'O=\dfrac{1}{3}\cdot 4\cdot\sqrt{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$．

$\therefore$三棱锥$F-A'BC$的体积为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

9．如图，一简单组合体的一个面ABC内接于圆O，AB是圆O的直径，四边形$DCBE$为平行四边形，且$DC\perp$平面ABC.

（1）证明：平面$ACD\perp$平面ADE；

（2）若$AB=2$，$BC=1$，$\tan\angle EAB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，试求该简单组合体的体积$V$.



（1）证明：$\because$ $DC\perp$平面ABC，$BC\subset$平面ABC $\therefore DC\perp BC$.

$\because AB$是圆O的直径 $\therefore BC\perp AC$ 且$DC\bigcap AC=C$

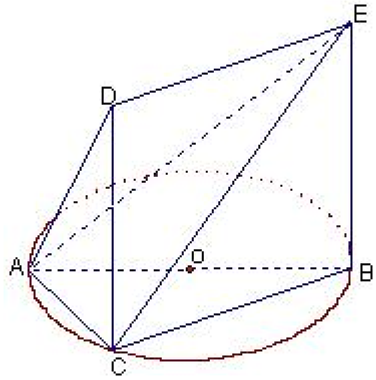
$\therefore BC\perp$平面ADC.

$\because$四边形$DCBE$为平行四边形 $\therefore DE//BC$

$\therefore DE\perp$平面ADC

$\because DE\subset$平面ADE $\therefore$平面$ACD\perp$平面ADE

（2）解法1：所求简单组合体的体积：$V=V_{E-ABC}+V_{E-ADC}$



$\because AB=2$，$BC=1$， $\tan\angle EAB=\dfrac{EB}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

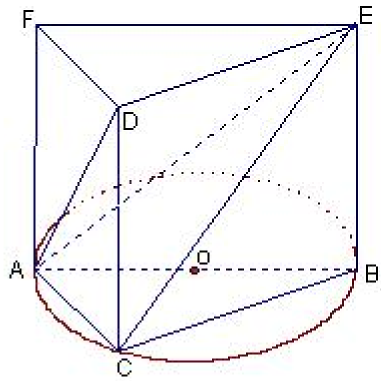
$\therefore BE=\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3}$

$\therefore V_{E-ADC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ADC}\cdot DE=\dfrac{1}{6}AC\cdot DC\cdot DE=\dfrac{1}{2}$

$V_{E-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot EB=\dfrac{1}{6}AC\cdot BC\cdot EB=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$该简单几何体的体积$V=1$

解法2：将该简单组合体还原成一侧棱与底面垂直的三棱柱



如图$\because AB=2$，$BC=1$， $\tan\angle EAB=\dfrac{EB}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore BE=\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3}$

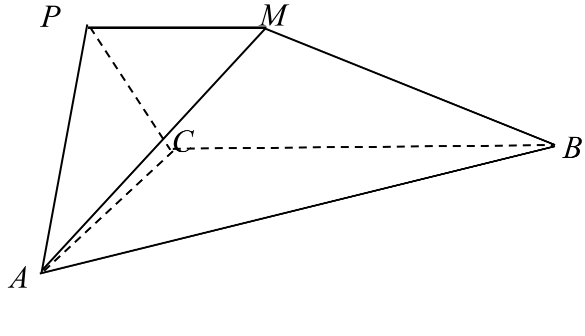
$\therefore V=V_{ACB-FDE}-V_{E-ADF}=S_{\Delta ACB}\cdot DC-\dfrac{1}{3}S_{\Delta ADC}\cdot DE$

$=\dfrac{1}{2}AC\cdot CB\cdot DC-\dfrac{1}{6}AC\cdot DC\cdot DE$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1\times\sqrt{3}-\dfrac{1}{6}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times 1=1$

10．如图所示几何体中，平面$PAC\perp$平面ABC，$PM // BC$，$PA=PC,AC=1$，

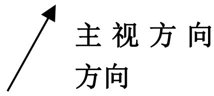
$BC=2PM=2$，$AB=\sqrt{5}$，若该几何体<u>左视图（侧视图）</u>的面积为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



（1）求证：$PA\perp BC$;

（2）画出该几何体的<u>主视图</u>并求其面积S;

（3）求出多面体 $PMABC$ 的体积 V.

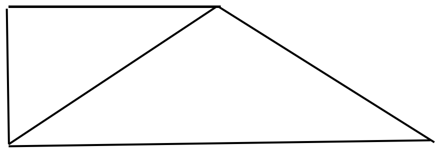


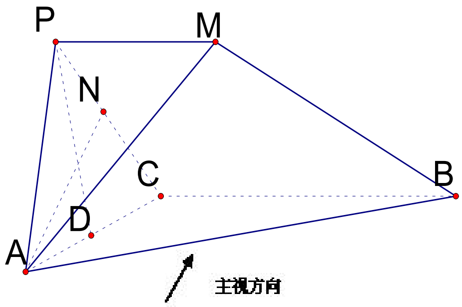
解：（1） $AC=1$，BC=2， $AB=\sqrt{5}$， $\therefore AC^2+BC^2=AB^2$， $\therefore AC\perp BC$，

∵平面 $PAC\perp$平面 ABC，平面 $PAC\cap$平面 $ABC=AC$,∴$BC\perp$平面 PAC

∵$PA\subset$平面 PAC，　∴$PA\perp BC$.

（2）该几何体的主视图如下：





∵$PA=PC$，取 AC 的中点 D，连接 PD，则 $PD\perp AC$，

又平面 $PAC\perp$平面 ABC，则 $PD\perp$平面 ABC，

∴几何体左视图的面积$=\dfrac{1}{2}AC\times PD=\dfrac{1}{2}\times 1\times PD=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

∴$PD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，并易知 ΔPAC 是边长为 1 的正三角形，

∴主视图的面积是上、下底边长分别为 1 和 2，PD 的长为高的直角梯形的面积，

∴$S=\dfrac{(1+2)}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

（3）取 PC 的中点 N，连接 AN，由 ΔPAC 是边长为 1 的正三角形，可知 $AN\perp PC$，由（1）$BC\perp$平面 PAC，可知 $AN\perp BC$，∴$AN\perp$平面 $PCBM$，∴AN 是四棱锥 A—$PCBM$ 的高且 $AN=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由 $BC\perp$平面 PAC，可知 $BC\perp PC$， $PM\,//\,BC$ 可知四边形 $PCBM$ 是上、下底边长分别为 1 和 2，PC 的长 1 为高的直角梯形，其面积 $S'=\dfrac{3}{2}$.

$\therefore V=\dfrac{1}{3}S'\cdot AN=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

11．制订投资计划时，不仅要考虑可能获得的盈利，而且要考虑可能出现的亏损.某投资人打算投资甲、乙两个项目.根据预测，甲、乙两个项目可能的最大盈利率分别为 100%和 50%，可能的最大亏损率分别为 30%和 10%.投资人计划投资金额不超过 10 万元，要求确保可能的资金亏损不超过 1.8 万元，问投资人对甲、乙两个项目各投资多少万元，才能使可能的盈利最大？

解：设投资人分别用 x 万元、 y 万元投资甲、乙两个项目，

由题意知$\begin{cases}x+y\le 10,\\ 0.3x+0.1y\le 1.8,\\ x\ge 0,\\ y\ge 0.\end{cases}$

目标函数$z=x+0.5y$.

上述不等式组表示的平面区域如图所示，阴影部分（含边界）即可行域.

作直线$l_0: x+0.5y=0$，并作平行于l_0的一组直线$x+0.5y=z$，$z\in\mathbf{R}$，

与可行域相交，其中一条直线经过可行域上的M点，且与直线$l_0: x+0.5y=0$的距离最大，这里M点是直线$x+y=10$和$0.3x+0.1y=1.8$的交点.

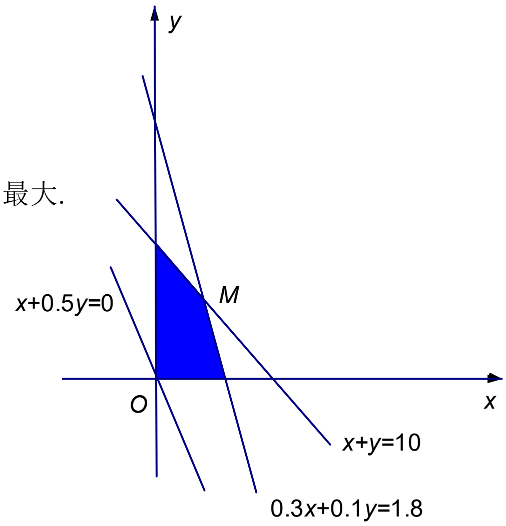
解方程组$\begin{cases}x+y=10,\\ 0.3x+0.1y=1.8.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=4,\\ y=6.\end{cases}$

此时$z=1\times 4+0.5\times 6=7$（万元），

$\therefore$当$x=4, y=6$时，z取得最大值.

答：投资人用4万元投资甲项目，6万元投资乙项目，

才能在确保亏损不超过1.8万元的前提下，使可能的盈利最大.



12. 已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点为$F_1,F_2$，$P$在椭圆$E$上，且

$PF_1\perp F_1F_2, |PF_1|=\dfrac{9}{5}, |PF_2|=\dfrac{41}{5}$.

(1) 求椭圆E方程；

(2) 若直线l过圆$M: x^2+y^2+6x-2y=0$的圆心M，交椭圆E于A,B两点，且A,B关于点M对称，求直线l的方程.

解: (1) $\because P$在E上, $\therefore 2a=|PF_1|+|PF_2|=10, a=5$,

$\because PF_1\perp F_1F_2$, $\therefore |F_1F_2|^2=|PF_2|^2-|PF_1|^2=(\dfrac{41}{5})^2-(\dfrac{9}{5})^2=64$,

$2c=8, c=4$，$\therefore b=3$. 所以椭圆E的方程是$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

(2) 设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),x_1\neq x_2$，$\therefore \dfrac{{x_1}^2}{25}+\dfrac{{y_1}^2}{9}=1,\dfrac{{x_2}^2}{25}+\dfrac{{y_2}^2}{9}=1$，

即$\dfrac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{25}+\dfrac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{9}=0$

又因圆的方程为$(x+3)^2+(y-1)^2=10$，所以M (-3, 1)，又因A,B关于点M对称，

即M为AB的中点，

$\therefore x_1+x_2=-6, y_1+y_2=2$，$\therefore -\dfrac{6}{25}(x_1-x_2)+\dfrac{2}{9}(y_1-y_2)=0$，$\therefore \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{27}{25}$.

$\therefore l$的方程为$y-1=\dfrac{27}{25}(x+3)$，即$27x-25y+106=0$.

13．设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，对任意$n\in\mathbf{N}^*$，都有$S_n=(2m+1)-2ma_n$ (m为常数，且$m<-\dfrac{1}{2}$).

（1）求证数列$\{a_n\}$为等比数列；

（2）设数列$\{a_n\}$的公比$q=f(m)$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=\dfrac{1}{2}a_1, b_n=f\left(\dfrac{1}{2}b_{n-1}\right)$($n\geq 2$, $n\in\mathbf{N}^*$)，求数列$\{b_n\}$的通项公式.

解：（1）由已知$S_n=(2m+1)-2ma_n$ ①

得$S_{n+1}=(2m+1)-2ma_{n+1}$ ②

②-①得$a_{n+1}=2ma_n-2ma_{n+1}$， 即$(2m+1)a_{n+1}=2ma_n$对任意$n\in\mathbf{N}^*$都成立.

$\because m$为常数，且$m<-\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2m}{2m+1}$，即数列$\{a_n\}$为等比数列.

（2）当$n=1$时，$a_1=S_1=2m+1-2ma_1$，得$a_1=1$，从而$b_1=\dfrac{1}{2}$.

由（1）知$q=f(m)=\dfrac{2m}{2m+1}$，$\because b_n=f\left(\dfrac{1}{2}b_{n-1}\right)=\dfrac{b_{n-1}}{b_{n-1}+1}$，

$\therefore \dfrac{1}{b_n}=1+\dfrac{1}{b_{n-1}}$，即$\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n-1}}=1$.

$\therefore \left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$为等差数列. $\therefore \dfrac{1}{b_n}=2+\left(n-1\right)=n+1$. $\therefore b_n=\dfrac{1}{n+1}$.

14．已知数列$\left\{a_n\right\}$是首项$a_1=\dfrac{1}{4}$的等比数列，其前n项和S_n中S_3，S_4，S_2成等差数列，

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\log_{\frac{1}{2}}\left|a_n\right|$，若$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{b_ib_{i+1}}\leqslant\lambda b_{n+1}$对一切$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求实数$\lambda$的最小值.

解：（1）若$q=1$，则$S_3=\dfrac{3}{4}$，$S_4=1,S_2=\dfrac{1}{2}$,显然S_3，S_4，S_2不构成等差数列.

$\therefore q\neq 1$，　　当$q\neq 1$时，由S_3，S_4，S_2成等差数列得

$$2\cdot\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$$

$\therefore 2q^4=q^3+q^2 \ \Rightarrow 2q^2-q-1=0\Rightarrow(2q+1)(q-1)=0$，

$\because q\neq 1$　　　$\therefore q=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{4}\cdot(-\dfrac{1}{2})^{n-1}=(-\dfrac{1}{2})^{n+1}$

（2）$\because b_n=\log_{\frac{1}{2}}\left|a_n\right|=\log_{\frac{1}{2}}\left|(-\dfrac{1}{2})^{n+1}\right|=n+1$

$\therefore \dfrac{1}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_ib_{i+1}}=\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\cdots+\frac{1}{b_nb_{n+1}}$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots\cdots+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2(n+2)}$$

由$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{b_ib_{i+1}}\leqslant\lambda b_{n+1}$　得$\dfrac{n}{2(n+2)}\leqslant\lambda(n+2)$　$\therefore \lambda\geqslant\dfrac{n}{2(n+2)^2}$

又$\dfrac{n}{2(n+2)^2}=\dfrac{1}{2(n+\dfrac{4}{n}+4)}\leqslant\dfrac{1}{2(4+4)}=\dfrac{1}{16}$

$\therefore \lambda$的最小值为$\dfrac{1}{16}$

B组

15．设数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_0=a,a_{n+1}=ca_n+1-c,c\in N^*$,其中$a,c$为实数，且$c\neq 0$

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式

（2）设$a=\dfrac{1}{2},c=\dfrac{1}{2}$，$b_n=n(1-a_n),n\in N^*$,求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$；

（3）若$0<a_n<1$对任意$n\in N^*$成立，证明$0<c\le 1$；

(1) 法 1：$\because a_{n+1}-1=c(a_n-1)$，

$\therefore$当$a\ne 1$时，$\{a_n-1\}$是首项为$a-1$，公比为c的等比数列.

$\therefore a_n-1=(a-1)c^{n-1}$，即 $a_n=(a-1)c^{n-1}+1$.当$a=1$时，$a_n=1$仍满足上式.

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=(a-1)c^{n-1}+1\ (n\in N^*)$.

法 2：由题设得：当$n>2$时$a_n-1=c(a_{n-1}-1)=c^2(a_{n-2}-1)=\cdots=c^{n-1}(a_1-1)=(a-1)c^{n-1}$

$\therefore a_n=(a-1)c^{n-1}+1$.

$n=1$时，$a_1=a$也满足上式.

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=(a-1)c^{n-1}+1\ (n\in N^*)$.

(2) 由（1）得$b_n=n(1-a)c^{n-1}=n(\dfrac{1}{2})^n$

$$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}+2(\frac{1}{2})^2+\cdots+n(\frac{1}{2})^n$$

$$\frac{1}{2}S_n=(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})^3+\cdots+n(\frac{1}{2})^{n+1}$$

$$\therefore \frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^n-n(\frac{1}{2})^{n+1}$$

$$\therefore S_n=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1}-n(\frac{1}{2})^n=2[1-(\frac{1}{2})^n]-n(\frac{1}{2})^n$$

$$\therefore S_n=2-(2+n)(\frac{1}{2})^n$$

(3) 由（1）知$a_n=(a-1)c^{n-1}+1$

若$0<(a-1)c^{n-1}+1<1$，则$0<(1-a)c^{n-1}<1$

$\because 0<a_1=a<1,\quad \therefore 0<c^{n-1}<\dfrac{1}{1-a}(n\in N^*)$

由$c^{n-1}>0$对任意$n\in N^*$成立，知$c>0$.下面证$c\le 1$，用反证法

假设$c>1$，$\because c^{n-1}<\dfrac{1}{1-a}$，$\therefore \log_c c^{n-1}<\log_c\dfrac{1}{1-a}$，

即 $n-1<\log_c\dfrac{1}{1-a}(n\in N^*)$ 恒成立　　（*）

$\because a,c$ 为常数，$\therefore$ （*）式对 $n\in N^*$ 不能恒成立，导致矛盾，$\therefore c\le 1$

$\therefore 0<c\le 1$.

16．已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a$，a 为正实数，$a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）若 $a_3>0$，求 a 的取值范围；

（2）是否存在正实数 a，使 $a_na_{n+1}>0$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，若存在，求 a 的取值范围；若不存在，说明理由.

解：（1）$\because a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，

$$\therefore a_3=a_2-\frac{1}{a_2}=a_1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1-\frac{1}{a_1}}=\frac{\left(a^2-1\right)^2-a^2}{a\left(a^2-1\right)}>0.$$

$$\therefore \frac{\left(a-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(a-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}{a(a+1)(a-1)}>0.$$

$\because a>0$，

$$\therefore \frac{\left(a-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}{a-1}>0,$$

解得 $a\in\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

（2）假设存在正实数 a，使 $a_na_{n+1}>0$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，

则 $a_n>0$，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

$$\therefore a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{a_n}<0,$$

$$\therefore 0<a_{n+1}<a_n,$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}>\frac{1}{a_n}>\cdots>\frac{1}{a_1},$$

又 $a_{n+1}=a_1+\left(a_2-a_1\right)+\left(a_3-a_2\right)+\cdots+\left(a_n-a_n\right)$

$$=a_1-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\cdots-\frac{1}{a_n}.$$

即 $a_{n+1}=a_1-(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})<a_1-\frac{n}{a_1}$.

故取 $n>a_1^2$，即 $n>a^2$，有 $a_{n+1}<0$，这与 $a_{n+1}>0$ 矛盾；

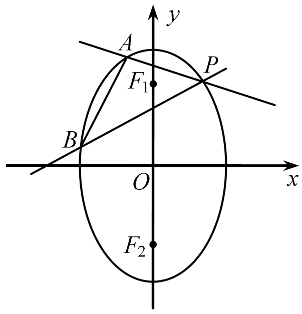
因此，不存在正实数 a，使 $a_na_{n+1}>0$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

17. 已知椭圆 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ 两焦点分别为 F_1,F_2，P 是椭圆在第一象限弧上一点，并满足 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=1$，过 P 作倾斜角互补的两条直线 PA,PB 分别交椭圆于 A,B 两点.

（Ⅰ）求 P 点坐标；

（Ⅱ）求证直线 AB 的斜率为定值；

（Ⅲ）求 ΔPAB 面积的最大值.



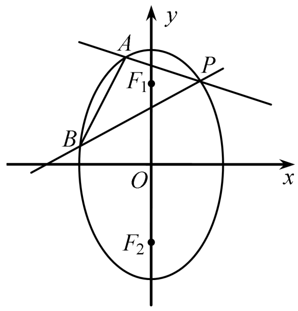
解：（1）由题可得 $F_1(0,\sqrt{2})$，$F_2(0-\sqrt{2})$，设 $P_0(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$

则 $\overrightarrow{PF_1}=(-x_0,\sqrt{2}-y_0)$，$\overrightarrow{PF_1}=(-x_0,-\sqrt{2}-y_0)$，

∴ $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=x_0^2-(2-y_0^2)=1$，∵点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线上，则 $\frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{4}=1$，∴ $x_0^2=\frac{4-y_0^2}{2}$，从而 $\frac{4-y_0^2}{2}-(2-y_0^2)=1$，得 $y_0=\sqrt{2}$. 则点 P 的坐标为 $(1,\sqrt{2})$.

（2）由题意知，两直线 PA、PB 的斜率必存在，设 PB 的斜率为 $k\,(k>0)$，

则 BP 的直线方程为：$y-\sqrt{2}=k(x-1)$. 由 $\begin{cases}y-\sqrt{2}=k(x-1)\\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 得



$(2+k^2)x^2+2k(\sqrt{2}-k)x+(\sqrt{2}-k)^2-4=0$，设 $B(x_B,y_B)$，则

$1+x_B=\frac{2k(k-\sqrt{2})}{2+k^2},x_B=\frac{2k(k-\sqrt{2})}{2+k^2}-1=\frac{k^2-2\sqrt{2}k-2}{2+k^2}$，

同理可得 $x_A=\frac{k^2+2\sqrt{2}k-2)}{2+k^2}$，则 $x_A-x_B=\frac{4\sqrt{2}k}{2+k^2}$，

$y_A-y_B=-k(x_A-1)-k(x_B-1)=\frac{8k}{2+k^2}$.

所以：AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\sqrt{2}$ 为定值.

（3）设 AB 的直线方程：$y=\sqrt{2}x+m$.

由$\begin{cases} y=\sqrt{2}x+m \\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得$4x^2+2\sqrt{2}mx+m^2-4=0$，

由$\Delta=(2\sqrt{2}m)^2-16(m^2-4)>0$，得$-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$

P到AB的距离为$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{3}}$，

则$S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\sqrt{(4-\dfrac{1}{2}m^2)\cdot 3}\cdot\dfrac{|m|}{\sqrt{3}}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{8}m^2(-m^2+8)}\le\sqrt{\dfrac{1}{8}(\dfrac{m^2-m^2+8}{2})^2}=\sqrt{2}$.

当且仅当$m=\pm 2\in\left(-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$取等号

∴三角形PAB面积的最大值为$\sqrt{2}$.

18．已知函数$f(x)=ax^2+ax$和$g(x)=x-a$．其中$a\in R$且$a\neq 0$.

（1）若函数$f(x)$与$g(x)$的图像的一个公共点恰好在x轴上，求a的值；

（2）若p和q是方程$f(x)-g(x)=0$的两根，且满足$0<p<q<\dfrac{1}{a}$，

证明：当$x\in\left(0,p\right)$时，$g(x)<f\left(x\right)<p-a$.

解:（1）设函数$g(x)$图像与x轴的交点坐标为（a，0），

∵点（a，0）也在函数$f(x)$的图像上，∴$a^3+a^2=0$.

而$a\neq 0$，∴$a=-1$.

（2）由题意可知　$f(x)-g(x)=a(x-p)(x-q)$.

∵$0<x<p<q<\dfrac{1}{a}$, ∴$a(x-p)(x-q)>0$,

∴当$x\in\left(0,p\right)$时，$f(x)-g(x)>0$, 即$f(x)>g(x)$.

又$f(x)-(p-a)=a(x-p)(x-q)+x-a-(p-a)=(x-p)(ax-aq+1)$，

$x-p<0$,　且$ax-aq+1>1-aq>0$, ∴$f(x)-(p-a)<0$, ∴$f(x)<p-a$,

综上可知，$g(x)<f\left(x\right)<p-a$.

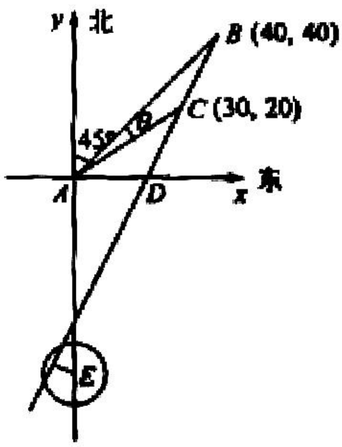
19. 在一个特定时段内，以点E为中心的7海里以内海域被设为警戒水域.点E正北55海里处有一个雷达观测站A.某时刻测得一艘匀速直线行驶的船只位于点A北偏东45°且与点A相距$40\sqrt{2}$海里的位置B，经过40分钟又测得该船已行驶到点A北偏东$45^\circ+\theta$(其中$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{26}}{26}$，$0^\circ<\theta<90^\circ$)且与点$A$相距$10\sqrt{13}$海里的位置$C$.

（1）求该船的行驶速度（单位：海里/小时）;

（2）若该船不改变航行方向继续行驶.判断它是否会进入警戒水域，并说明理由.

解:（1）如图，$AB=40\sqrt{2}$，$AC=10\sqrt{13}$，

$$\angle BAC=\theta,\sin\theta=\frac{\sqrt{26}}{26}.$$



由于 $0^\circ<\theta<90^\circ$,所以 $\cos\theta=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{26}}{26})^2}=\frac{5\sqrt{26}}{26}.$

由余弦定理得 BC=$\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\bullet AC\bullet\cos\theta}=10\sqrt{5}.$

所以船的行驶速度为$\dfrac{10\sqrt{5}}{\frac{2}{3}}=15\sqrt{5}$（海里/小时）.

（2）解法 1： 如图所示，以 A 为原点建立平面直角坐标系，

设点 B、C 的坐标分别是 B（x_1，y_2）, C（x_1，y_2），

BC 与 x 轴的交点为 D.

由题设有，$x_1=y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$AB=40,

$x_2=AC\cos\angle CAD=10\sqrt{13}\cos(45^\circ-\theta)=30$,

$y_2=AC\sin\angle CAD=10\sqrt{13}\sin(45^\circ-\theta)=20.$

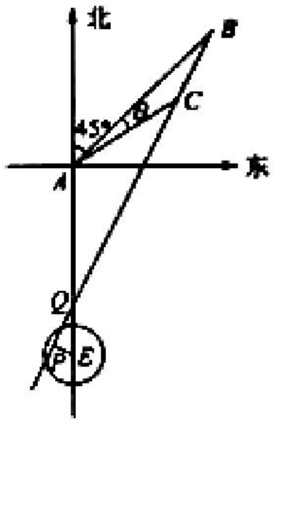
所以过点 B、C 的直线 l 的斜率 $k=\dfrac{20}{10}=2$,直线 l 的方程为 $y=2x-40$.

又点 E（0，-55）到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|0+55-40|}{\sqrt{1+4}}=3\sqrt{5}<7.$

所以船会进入警戒水域.

解法 2: 如图所示，设直线 AE 与 BC 的延长线相交于点 Q.

在△ABC 中，由余弦定理得，



$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$$

$$=\frac{40^2\times 2+10^2\times 5-10^2\times 13}{2\times 40\sqrt{2}\times 10\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

从而$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\sqrt{1-\frac{9}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$

在 ΔABQ 中，由正弦定理得，

$$AQ=\frac{AB\sin\angle ABC}{\sin(45^\circ-\angle ABC)}=\frac{40\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{10}}{10}}=40.$$

由于 $AE=55>40=AQ$，所以点 Q 位于点 A 和点 E 之间，且 $QE=AE-AQ=15$.

过点 E 作 $EP\perp BC$ 于点 P，则 EP 为点 E 到直线 BC 的距离.

在 RtΔQPE 中，$PE=QE\bullet\sin\angle PQE=QE\cdot\sin\angle AQC=QE\cdot\sin(45^\circ-\angle ABC)$

$$=15\times\frac{\sqrt{5}}{5}=3\sqrt{5}<7.$$

所以船会进入警戒水域.

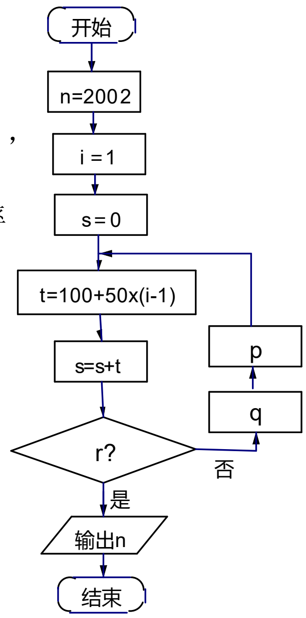
20．某地区有荒山 2200 亩，从 2002 年开始每年年初在荒山上植树造林，第一年植树 100 亩，以后每年比上一年多植树 50 亩.

（1）若所植树全部成活，则到哪一年可以将荒山全部绿化？

（2）右图是某同学设计的解决问题（1）的程序框图，则框图中 p， q， r 处应填上什么条件？

（3）若每亩所植树苗木材量为 2 立方米，每年树木木材量的自然增长率为 20%，那么到全部绿化后的那一年年底，该山木材总量是多少？

（精确到 1 立方米，$1.2^8 \approx 4.3$）



解：（1）设植树 n 年后可将荒山全部绿化，记第 n 年初植树量为 a_n，

依题意知数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 100$，公差 $d = 50$ 的等差数列，

则 $100n + \frac{n(n-1)}{2} = 2200$ 即 $n^2 + 3n - 88 = 0 \Rightarrow (n+11)(n-8) = 0$

$\because n \in N^*$ $\therefore n = 8$

∴到 2009 年初植树后可以将荒山全部绿化.

（2） p 处填 $n = n+1$，q 处填 $i = i+1$，（或 p 处填 $i = i+1$， q 处填 $n = n+1$）

r 处填 $s >= 2200$．（或 $s = 2200$）

（3）2002 年初木材量为 $2a_1\ m^3$，到 2009 年底木材量增加为 $2a_1(1.2)^8\ m^3$，

2003 年初木材量为 $2a_2\ m^3$，到 2009 年底木材量增加为 $2a_2(1.2)^7\ m^3$，……

2009 年初木材量为 $2a_8\ m^3$，到 2009 年底木材量增加为 $2a_8 \times 1.2\ m^3$.

则到 2009 年底木材总量 $S = 2a_1 \times 1.2^8 + 2a_2 \times 1.2^7 + 2a_3 \times 1.2^6 + \cdots + 2a_8 \times 1.2$

$S = 900 \times 1.2 + 800 \times 1.2^2 + \cdots + 400 \times 1.2^6 + 300 \times 1.2^7 + 200 \times 1.2^8$ ----------①

$1.2S = 900 \times 1.2^2 + 800 \times 1.2^3 + \cdots + 400 \times 1.2^7 + 300 \times 1.2^8 + 200 \times 1.2^9$ ---------②

②-①得

$0.2S = 200 \times 1.2^9 + 100 \times (1.2^2 + 1.2^3 + \cdots + 1.2^8) - 900 \times 1.2$

$= 700 \times 1.2^9 - 500 \times 1.2^2 - 900 \times 1.2 = 840 \times 1.2^8 - 1800 \approx 840 \times 4.3 - 1800 = 1812$

$\therefore S = 9060$ m²

答：到全部绿化后的那一年年底，该山木材总量为 9060m²