**杭州学军中学2024学年第二学期期中考试**

**高二数学试卷**

**命题人：徐政 审题人：龙崎钢**

**一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）**

1. 已知集合，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】解对数不等式化简集合*A*，进而可得并集.

【详解】由题意可得：，

且，所以.

故选：C.

2. “”是“直线与直线互相垂直”的（ ）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】因为直线与直线互相垂直，所以或.再利用充分条件必要条件的定义判断得解.

【详解】因为直线与直线互相垂直，

所以，

所以或.

因为“”可以推出“或”，“或”不能推出“”，

所以“”是“直线与直线互相垂直”的充分非必要条件.

故选：A

【点睛】方法点睛：充分必要条件的判定，常用的方法有：（1）定义法；（2）集合法；（3）转化法. 要根据已知条件灵活选择方法求解.

3. 函数，若在是减函数，则实数*a*的取值范围为（ ）

A  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】求导，导函数小于等于0恒成立，分离参数求新函数最值即可求解．

【详解】函数，

若函数在区间上是减函数，则在恒成立，

即在恒成立，

由对勾函数性质可知在单调递减，故，所以.

故选：C.

4. 已知圆的方程为，直线与圆交于两点，直线与圆交于两点，则（为坐标原点）等于（ ）

A. 4 B. 8

C. 9 D. 18

【答案】D

【解析】

【分析】由题设圆与轴相切于，结合切割线定理、向量共线求的值.

【详解】由题设知：圆与轴相切于点，

由切割线定理得，

由于及分别共线，

所以．

故选：D

5. 已知函数（，）的最小正周期是，将函数的图象向左平移个单位长度后所得的函数图象过点，则函数

A. 有一个对称中心 B. 有一条对称轴

C. 在区间上单调递减 D. 在区间上单调递增

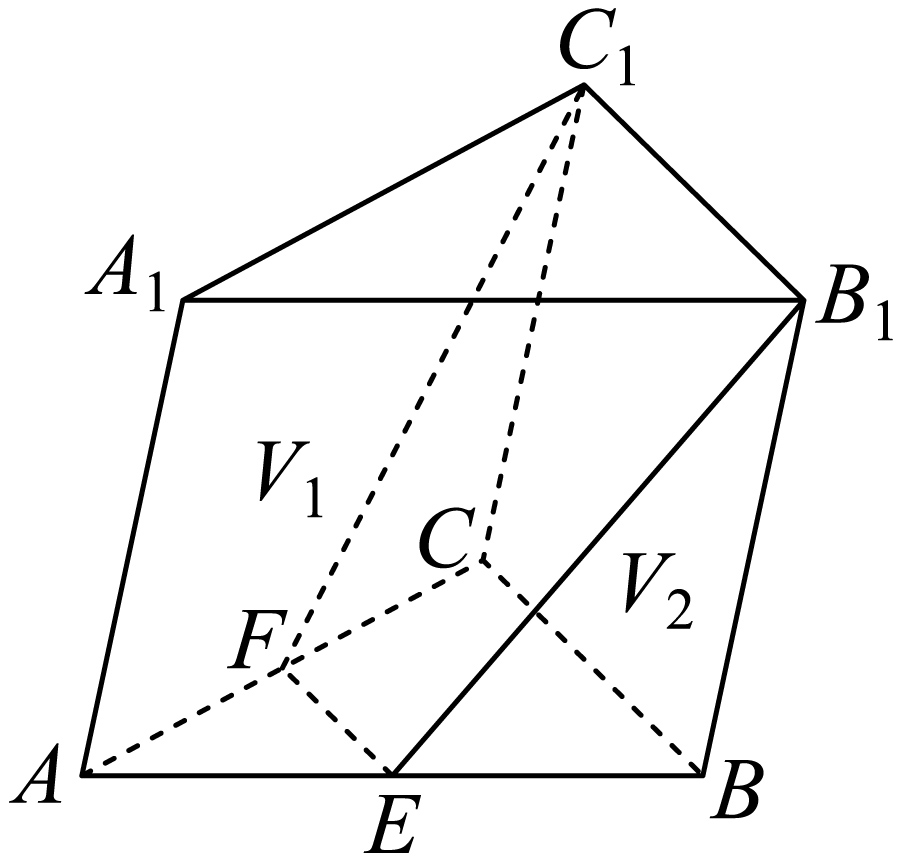
【答案】B

【解析】

【详解】由题，平移后得到的函数是，其图象过点,，因为，，,故选B.

点睛：本题考查的是的图象及性质.解决本题的关键有两点:一是图象向左平移变换时要弄清是加还是减，是x加减，还是2x加减，另一方面是根据图象过点确定的值时，要结合五点及确定其取值，得到函数的解析式，再判断其对称性和单调性.

6. 如图，在三棱柱中，*E*，*F*分别为*AB*，*AC*的中点，平面将三棱柱分成体积为，两部分，则（ ）



A. 1∶1 B. 4∶3 C. 6∶5 D. 7∶5

【答案】D

【解析】

【分析】根据割补法结合棱台的体积公式，即可求得答案.

【详解】设三棱柱的高为*h*，上下底面面积均为*S*，体积为*V*，

则，

因为*E*，*F*分别为*AB*，*AC*的中点，故,

结合题意可知几何体为棱台，

则，

故,故，

故选：D

7. 甲、乙、丙、丁4人参加活动，4人坐在一排有12个空位的座位上，根据要求，任意两人之间需间隔至少两个空位，则不同的就座方法共有（ ）

A. 120种 B. 240种 C. 360种 D. 480种

【答案】C

【解析】

【分析】先假设每个人坐一个位置相当于去掉4个位置，再将4个人中间任意两个人之间放入2个空位，此时空位一共还剩2个，再将这两个空位分一起和分开插入4人之间和两侧空位，即可得解.

【详解】先假设每个人坐一个位置相当于去掉4个位置，

再将4个人中间任意两个人之间放入2个空位，

此时空位一共还剩2个，

若将这两个空位连在一起插入4人之间和两侧空位，有5种放法；

若将这两个空位分开插入4人之间和两侧空位，有种放法，

故不同的就座方法共有种.

故选：C.

8. 已知函数满足：对，都有，，若，则的取值范围是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】由题意可得，，进而可求得

【详解】，

则，

则，

即，所以，即

故选：B.

**二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．**

9. 下列说法正确的是（    ）

A. 数据1，2，3，5，7，9的中位数大于平均数

B. 数据0，1，0，1，0，1的标准差大于方差

C. 在相关分析中，样本相关系数的绝对值越大，线性相关程度越强

D. 已知随机变量*X*服从正态分布且，则

【答案】BCD

【解析】

【分析】对于A：求数据中位数和平均数即可得；对于B：求数据方差和标准差即可；对于C：根据相关系数性质分析判断；对于D：根据正态分布的对称性分析判断.

【详解】对于选项A：数据1，2，3，5，7，9的中位数为，平均数为，

因为，所以中位数小于平均数，故A错误；

对于选项B：因为数据平均数为，

方差，标准差，

所以标准差大于方差，故B正确；

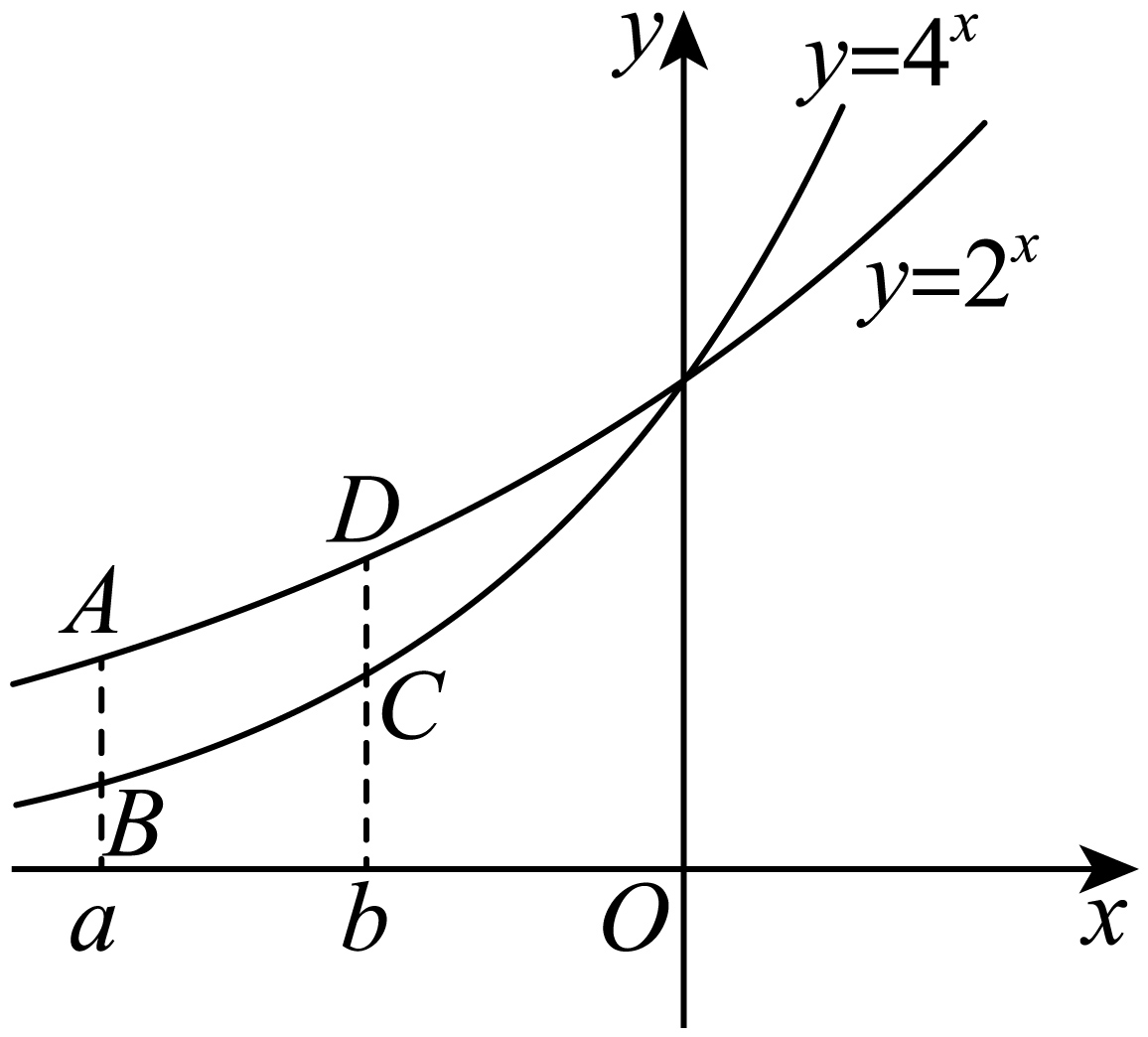
对于选项C：样本相关系数的绝对值越大，线性相关程度越强，故C正确；

对于选项D：因为且，

所以，故D正确；

故选：BCD.

10. 如图，已知直线，与函数，的图象分别交于，，，四点，且为平行四边形，则（ ）



A.  B. 

C.  D. 

【答案】AD

【解析】

【分析】首先确定点点的坐标，利用平行四边形对边平行且相等的性质  ，建立关于  的等式，利用平方差公式化简得到  ，再通过均值不等式可得  ，最后分析选项得出结论.

【详解】依题意，当  时，  在  图象下方，

所以在  图象上， 在  图象上，

所以  ， ，  ， 

又因为四边形为平行四边形，

所以  ，即  ，即

，

又因为  ，所以  ，

 . 故A正确， B错误.

由均值不等式  ，化简可得

 ，当  时等号成立，

由于 ，故  ， D正确， C错误.

故选：AD.

11. 在中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，若，则下列正确的是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用正弦定理、余弦定理化简已知条件，求得，即可判断A，然后结合二倍角公式利用正弦定理判断C，根据正弦定理和两角和差公式化简式子判断B，利用正弦定理和三角恒等变换得，利用函数的单调性即可判断D.

【详解】依题意，，

由正弦定理得，

由于，所以，

所以，

所以，

即，

由正弦定理得，

所以，则或，

若，则，

，不符合题意，所以，A选项正确，则为锐角，

所以，有正弦定理得，

而是锐角，，所以C选项错误.

对于，由正弦定理得





，

所以B选项正确.

对于D选项，由正弦定理得





，

由上述分析可知，

所以，由于函数在上单调递增，

，所以，

即，所以D选项正确.

故选：ABD

**三、填空题：本大题共3小题，每题5分，共15分.**

12. 的展开式中常数项是\_\_\_\_\_\_（用数字作答）．

【答案】240

【解析】

【分析】写出二项展开式的通项，令的指数为0，即可求解，进而可求常数项.

【详解】的二项展开式的通项为，

令得，故常数项为，

故答案为：240．

13. 已知椭圆的右焦点为*F*，*P*，*Q*在椭圆上且关于原点对称，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

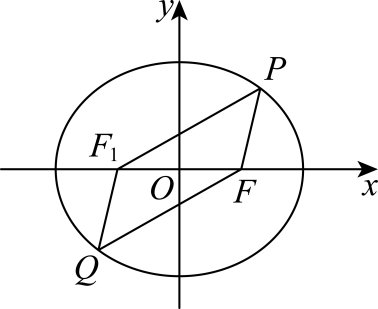
【答案】

【解析】

【分析】由椭圆性质，有，，，则，利用构造函数的方法求取值范围.

【详解】由椭圆方程可知，，左焦点为，设，

，



由对称性可知，由，

得，则有，

，

令，设，

由对勾函数的性质可知在上单调递减，在上单调递增，

，，，

则，所以.

故答案为：.

14. 箱子中有大小相同的6个小球，分别标有数字1，1，2，2，3，4．甲、乙两人进行三轮比赛，在每轮比赛中，两人依次从箱子中随机摸出1球，甲先摸，乙后摸，摸出的球不放回，并比较摸出的球的标号大小，数字大的人得1分，数字小的人不得分，如果数字一样，则都不得分.经过三轮比赛后，箱子中的球被摸完，此时甲的累计得分比乙的累计得分大的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】因为比赛对甲、乙公平，所以甲累计得分比乙大的概率和乙累计得分比甲大的概率相等，且二者概率和加上甲乙得分相同的概率为.所以先算甲乙得分相同概率，再求甲累计得分比乙大的概率.

【详解】如果甲乙得分相等，则得分之比只能为，

则三局中一轮平局，其余两轮各得1分，故概率为，

那么甲累计得分比乙大的概率.

故答案为：.

**四．解答题：本大题共5小题，共77分．解答应写出文字说明．证明过程或演算步骤．**

15. 数列的前项和为，已知且．

（1）求的通项公式；

（2）设数列满足，求的最大值．

【答案】（1）；

（2）1.

【解析】

【分析】（1）利用即可求解；

（2）判断数列的单调性即可求解.

【小问1详解】

∵①，

∴②，

①②得：，，

①中令*n*＝2，则，∴，

为首项为1，公比为2的等比数列，

∴.

【小问2详解】

由（1）知：，

则，

所以

所以当时，有最大值.

16. 某工厂为了解员工绩效分数达标情况与员工性别的关系，随机对该厂男、女各30名员工的绩效分数达标情况进行调查，整理得到如下列联表：单位：人

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 性别 | 绩效分数达标情况 | | 合计 |
| 未达标 | 达标 |
| 男 | 20 | 10 | 30 |
| 女 | 5 | 25 | 30 |
| 合计 | 25 | 35 | 60 |

（1）根据上表数据，依据小概率值的独立性检验，能否据此推断绩效分数达标情况与性别有关联？

（2）该厂为激励员工，规定每月绩效分数的第一名奖励1千元，其他名次无奖励.甲为该厂员工，他在工厂开工的第一个月赢得奖励的概率为，从第二个月开始，若上个月没有赢得奖励，则这个月赢得奖励的概率为；若上个月赢得奖励，则这个月仍赢得奖励的概率为，求甲在前两个月所得奖金总额*X*（单位：千元）的分布列和数学期望.

附：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0.1 | 0.01 | 0.001 |
|  | 2.706 | 6.635 | 10.828 |

参考公式：，其中.

【答案】（1）可以推断绩效分数达标情况与性别有关联

（2）分布列见详解；

【解析】

【分析】（1）由已知数据利用公式计算，与参考数据比较大小即可得出结论；

（2）根据题意计算出可能取值及相应概率，即可得到分布列，再利用公式计算期望值.

【小问1详解】

零假设：绩效分数达标情况与性别无关联，

由题意可得：，

依据小概率值的独立性检验，推断不成立，

即可以推断绩效分数达标情况与性别有关联，此推断犯错误概率不大于.

【小问2详解】

由题意知可能的取值为，

则；

；

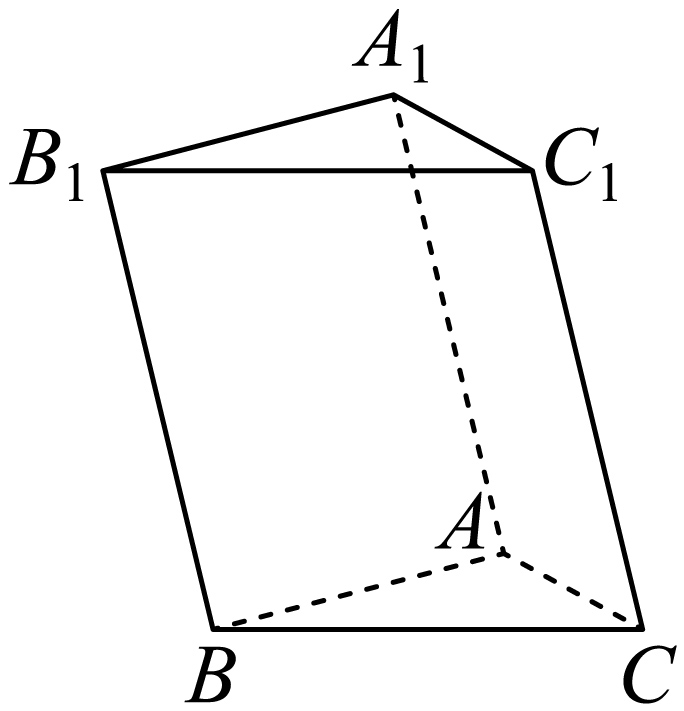
；

所以甲在前两个月所得奖金总额的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |

数学期望

17. 在三棱柱中，，平面平面.



（1）证明：；

（2）若，且与平面所成角为，求与所成角的余弦值．

【答案】（1）证明见详解

（2）或

【解析】

【分析】（1）根据面面垂直可得平面，结合平行关系即可得线线垂直；

（2）建系标点，设，根据题意结合空间向量列式求，进而可求线线夹角.

【小问1详解】

因为，平面平面，平面平面，平面，

可得平面，且平面，则，

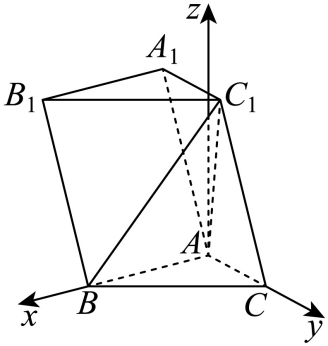
又因为∥，所以.

【小问2详解】

以为坐标原点，分别为轴，建立空间直角坐标系，

因为平面平面，

可知轴所在直线包含于平面，且点在平面内的投影落在直线上，



则，

设，则，

可得，

因为，即，

又因为与平面所成角为，且平面的法向量为，

则，

整理可得，

联立方程，解得或，

若，则，

可得，

所以与所成角的余弦值为；

若，则，

可得，

所以与所成角的余弦值为；

综上所述：与所成角的余弦值为或.

18. 已知点是直线外的一个动点，，垂足为，且在线段外，，记点的轨迹为曲线．不过原点的直线交于两点，关于轴的对称点为，直线和的斜率之积为．

（1）求的方程；

（2）判断是否过定点，若是则求出该定点，若不是则说明理由；

（3）证明：不可能为锐角三角形．

【答案】（1）

（2）过定点

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）先设动点坐标，将几何关系转化为坐标关系后可得曲线的方程；

（2）设直线方程并联立，代入双曲线方程得到关于的一元二次方程，利用韦达定理化简目标代数式后可得定点；

（3）利用向量的数量积可判断三角形的形状.

【小问1详解】

设，因为，且，垂足为，则点坐标为．

则，

已知，即．

因为在线段外，所以，

则，整理可得曲线的方程为．

【小问2详解】

设，则．

显然的斜率不为零，否则有，

此时，与直线和的斜率之积为6，矛盾．

故可设，由得，

依题意，且，

∴且．

由得，

∴，

∵直线和的斜率之积为6，∴，

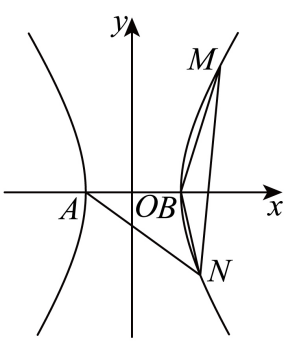
即，，，解得．

此时恒成立，∴，过定点．

小问3详解】

由（2）知，．

①当，即时，，∴均在的右支，如图．



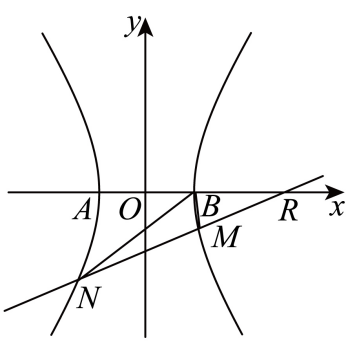
此时

，

∴是钝角，是钝角三角形．

②当，即或时，，

∴分别在的两支．不妨设在的右支，则，如图．



设，则，

∴．

∵过点，∴，

∴是钝角，是钝角三角形．

综上可知，不可能是锐角三角形．

19. 阅读下列材料：

定义1：设是两个（项数有限的）实数数列．数列*A*和*B*的项满足以下三个条件：

（i）且；

（ii）对于任意的，有；

（iii）．

那么我们就说数列优超于数列，写成或．

定义2：对函数，若它的导函数的导函数，就称下凸．

定理：若函数下凸，且数列优超于数列，即，则．

根据以上材料，回答下列问题：

（1）判断数列与数列是否有优超关系，并证明你的结论．

（2）若数列超于数列，即，证明：的方差一定大于的方差．

（3）若函数，证明：．

【答案】（1），证明见解析；

（2）证明见解析； （3）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）根据优超定义直接判断即可；

（2）根据方差定义求得，再利用二阶求导判断为下凸函数，从而证明不等式关系；

（3）二阶求导得，再证明其大于0，设，证明

【小问1详解】

由于，故，即可证明不等关系.

【小问2详解】

数列*A*的方差，

数列*B*的方差，

由，知，

于是只需证明，

考虑函数，由知下凸，

于是由定理知，

即证.

【小问3详解】

对求导，得

，

.

下面我们证明，

设，则，

时，单调递减，时，单调递增，

于是，

设，则，

时，单调递减，时，单调递增，

于是，

根据二次函数在上单调递增，

则由，

故于起下凸，

设，由知，

于是由定理知，

而，故.