**数列求和及等差、等比数列的综合应用**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 年份 | 2022 | 2023 | 2024 |
| 角度 | 题号 | 角度 | 题号 | 角度 | 题号 |
| 新高考*Ⅰ*卷 | 由递推关系求通项公式与裂项相消法求和 | 17 | 求数列的通项公式与公差 | 20 | 数列的新定义问题 | 19 |
| 新高考*Ⅱ*卷 | 等差、等比数列的综合应用 | 17 | 数列的通项公式与前*n*项和的综合应用 | 18 | 数列的应用 | 19 |



【典例**1**】(13分)(规范解答)(2024·全国甲卷)已知数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,且4*Sn*=3*an*+4*.*

(1)求{*an*}的通项公式;

(2)设*bn*=(-1)*n*-1*nan*,求数列{*bn*}的前*n*项和*Tn.*

【审题思维】

(1)由已知递推关系进行转化,然后结合等比数列的通项公式即可求解;

(2)先求出*bn*,然后结合错位相减法求解*.*

**【解析】(1)因为4*Sn*=3*an*+4,所以4*Sn*+1=3*an*+1+4,两式相减可得4*an*+1=3*an*+1-3*an*, ……3分**

**即*an*+1=-3*an*,又因为4*S*1=3*a*1+4,**

**所以*a*1=4,故数列{*an*}是首项为4,公比为-3的等比数列,所以*an*=4·(-3)*n*-1; …6分**

**(2)*bn*=(-1)*n*-1*nan*=4*n*·3*n*-1, ……8分**

**所以*Tn*=4(1·30+2·31+3·32+…+*n*·3*n*-1),3*Tn*=4(1·31+2·32+3·33+…+*n*·3*n*), ……10分**

**两式相减可得:-2*Tn*=4(1+31+32+…+3*n*-1-*n*·3*n*)=4(**$\frac{1-3^{n}}{-2}$**-*n*·3*n*)=(2-4*n*)3*n*-2,**

**所以*Tn*=(2*n*-1)3*n*+1*.* ……13分**

【题后反思】

本题考查由递推关系求数列的通项公式、错位相减法的应用,解题时谨防两个易错点:

(1)由*Sn*求*an*,注意对*n*=1时对应的首项的检验;

(2)利用错位相减法求解时,不要弄错项数*.*

【典例**2**】(2024·泉州二模)已知数列{*an*}和{*bn*}的各项均为正,且*a*3=18*b*1,{*bn*}是公比为3的等比数列*.*数列{*an*}的前*n*项和*Sn*满足4*Sn*=$a\_{n}^{2}$+2*an.*

(1)求数列{*an*},{*bn*}的通项公式;

(2)设*cn*=$\frac{b\_{n+3}}{(b\_{n+3}-3)(b\_{n+3}-1)}$+*an*cos *n*π,求数列{*cn*}的前*n*项和*Tn.*

【审题思维】

(1)利用递推公式可证得数列{*an*}是等差数列,可求出数列{*an*}的通项公式;利用等比数列的性质,可求出{*bn*}的通项公式;

(2)求出*cn*,根据裂项相消法和分组求和法求*Tn.*

**【解析】(1)由题设,当*n*=1时,4*S*1=**$a\_{1}^{2}$**+2*a*1,所以*a*1=2或*a*1=0(舍),**

**由4*Sn*=**$a\_{n}^{2}$**+2*an*,知4*Sn*-1=**$a\_{n-1}^{2}$**+2*an*-1,两式相减得(*an*+*an*-1)(*an*-*an*-1-2)=0,所以*an*+*an*-1=0(舍)或*an*-*an*-1-2=0,即*an*-*an*-1=2,**

**所以数列{*an*}是首项为2,公差为2的等差数列,所以*an*=2*n.*又*a*3=18*b*1=6,所以*b*1=**$\frac{1}{3}$**,所以*bn*=3*n*-2*.***

**(2)*cn*=**$\frac{b\_{n+3}}{(b\_{n+3}-3)(b\_{n+3}-1)}$**+*an*cos *n*π=**$\frac{3^{n+1}}{(3^{n+1}-3)(3^{n+1}-1)}$**+(-1)*n*2*n*=**$\frac{3^{n}}{(3^{n}-1)(3^{n+1}-1)}$**+(-1)*n*2*n***

**=**$\frac{1}{2}$**(**$\frac{1}{3^{n}-1}$**-**$\frac{1}{3^{n+1}-1}$**)+(-1)*n*2*n*,**

**则*Tn*=**$\frac{1}{2}$**[(**$\frac{1}{3-1}$**-**$\frac{1}{3^{2}-1}$**)+(**$\frac{1}{3^{2}-1}$**-**$\frac{1}{3^{3}-1}$**)+…+(**$\frac{1}{3^{n}-1}$**-**$\frac{1}{3^{n+1}-1}$**) ]+2([(-1+2)+(-3+4)+…+(-1)*nn*],**

**当*n*为偶数时,*Tn*=**$\frac{1}{2}$**(**$\frac{1}{2}$**-**$\frac{1}{3^{n+1}-1}$**)+*n*;**

**当*n*为奇数时,*Tn*=**$\frac{1}{2}$**(**$\frac{1}{2}$**-**$\frac{1}{3^{n+1}-1}$**)-(*n*+1)=-**$\frac{1}{2(3^{n+1}-1)}$**-*n*-**$\frac{3}{4}$***.***

**所以*Tn*=**$\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{n+1}-1})+n,n为偶数\\-\frac{1}{2(3^{n+1}-1)}-n-\frac{3}{4},n为奇数\end{matrix}\right.$***.***

【题后反思】

本题考查等差、等比数列通项公式的求法及裂项相消法、分组求和法,解题时需要注意:

(1)利用裂项相消法求和时,要保证相消前后等号成立;

(2)当通项公式中出现(-1)*n*,(-1)*n*+1,求和时常按奇偶讨论*.*



1*.*★★★☆☆(2024·成都模拟)记数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,已知2*Sn*=*n*2+*an*+*a*1-1*.*

(1)若*a*1≠1,证明:{*an*-*n*}是等比数列;

(2)若*a*2是*a*1和*a*3的等差中项,设*bn*=$\frac{1}{a\_{n}a\_{n+2}}$,求数列{*bn*}的前*n*项和*Tn.*

**【解析】(1)对2*Sn*=*n*2+*an*+*a*1-1①,当*n*≥2时,有2*Sn*-1=(*n*-1)2+*an*-1+*a*1-1②,**

**①-②:2(*Sn*-*Sn*-1)=2*n*-1+*an*-*an*-1,即2*an*=2*n*-1+*an*-*an*-1,**

**经整理,可得*an*-*n*=(-1)[*an*-1-(*n*-1)],*a*1≠1,故{*an*-*n*}是以*a*1-1为首项、-1为公比的等比数列*.***

**(2)由(1)知*an*-*n*=(-1)*n*-1(*a*1-1),有*a*2=3-*a*1,*a*3=*a*1+2,**

**由题设知2*a*2=*a*1+*a*3,即2(3-*a*1)=*a*1+(*a*1+2),则*a*1=1,故*an*=*n.***

**而*bn*=**$\frac{1}{a\_{n}a\_{n+2}}$**=**$\frac{1}{n(n+2)}$**=**$\frac{1}{2}$**(**$\frac{1}{n}$**-**$\frac{1}{n+2}$**),**

***Tn*=*b*1+*b*2+…+*bn*-1+*bn*=**$\frac{1}{2}$**(**$\frac{1}{1}$**-**$\frac{1}{3}$**+**$\frac{1}{2}$**-**$\frac{1}{4}$**+…+**$\frac{1}{n-1}$**-**$\frac{1}{n+1}$**+**$\frac{1}{n}$**-**$\frac{1}{n+2}$**)=**$\frac{1}{2}$**(**$\frac{1}{1}$**+**$\frac{1}{2}$**-**$\frac{1}{n+1}$**-**$\frac{1}{n+2}$**),**

**故*Tn*=**$\frac{3}{4}$**-**$\frac{1}{2}$**(**$\frac{1}{n+1}$**+**$\frac{1}{n+2}$**)*.***

2*.*★★★☆☆(2024·绍兴三模)已知数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,且*a*1=2,*Sn*=$\frac{n}{n+2}$*an*+1,设*bn*=$\frac{S\_{n}}{n}$*.*

(1)求证:数列{*bn*}为等比数列;

(2)求数列{*Sn*}的前*n*项和*Tn.*

**【解析】(1)*Sn*=**$\frac{n}{n+2}$***an*+1=**$\frac{n}{n+2}$**(*Sn*+1-*Sn*),即(*n*+2)*Sn*=*n*(*Sn*+1-*Sn*),即*nSn*+1=(2*n*+2)*Sn*,则**$\frac{nS\_{n+1}}{n(n+1)}$**=**$\frac{(2n+2)S\_{n}}{n(n+1)}$**,即**$\frac{S\_{n+1}}{n+1}$**=**$\frac{2S\_{n}}{n}$**,**

**即*bn*+1=2*bn*,又*b*1=**$\frac{S\_{1}}{1}$**=*a*1=2,**

**故数列{*bn*}是以2为首项、以2为公比的等比数列;**

**(2)由(1)得*bn*=2*n*,即**$\frac{S\_{n}}{n}$**=2*n*,则*Sn*=*n*·2*n*,**

**则*Tn*=1·21+2·22+…+*n*·2*n*,**

**有2*Tn*=1·22+2·23+…+*n*·2*n*+1,**

**则*Tn*-2*Tn*=-*Tn*=2+22+23+…+2*n*-*n*·2*n*+1=**$\frac{2(1-2^{n})}{1-2}$**-*n*·2*n*+1=2*n*+1-2-*n*·2*n*+1=(1-*n*)·2*n*+1-2,故*Tn*=(*n*-1)·2*n*+1+2*.***

3*.*★★★☆☆(2024·安康模拟)记*Sn*为数列{*an*}的前*n*项和,已知*a*1=1,*nSn*+1-(*n*+1)*Sn*=*n*2+*n.*

(1)求{*an*}的通项公式;

(2)若*bn*=(-1)*nan*+$\left[(-1)^{n}+1\right]$2*n*,求数列{*bn*}的前2*n*项和*T*2*n.*

**【解析】(1)由*nSn*+1-(*n*+1)*Sn*=*n*2+*n*,可得*nSn*+1-(*n*+1)*Sn*=*n*(*n*+1),**

**所以**$\frac{S\_{n+1}}{n+1}$**-**$\frac{S\_{n}}{n}$**=1,又由*a*1=1,所以**$\frac{S\_{1}}{1}$**=**$\frac{a\_{1}}{1}$**=1,所以数列{**$\frac{S\_{n}}{n}$**}是以1为首项,1为公差的等差数列,**

**所以**$\frac{S\_{n}}{n}$**=1+(*n*-1)×1=*n*,则*Sn*=*n*2,**

**当*n*≥2时,*Sn*-1=(*n*-1)2,所以*Sn*-*Sn*-1=*an*=*n*2-(*n*-1)2=2*n*-1,**

**又当*n*=1时,*a*1=1满足上式,**

**所以{*an*}的通项公式为*an*=2*n*-1*.***

**(2)由(1)可知,当*n*为奇数时,*bn*=-*an*=1-2*n*;当*n*为偶数时,*bn*=*an*+2×2*n*=2*n*-1+2*n*+1,所以*T*2*n*=*b*1+*b*2+*b*3+*b*4+…+*b*2*n*=(*b*1+*b*3+*b*5+…+*b*2*n*-1)+(*b*2+*b*4+*b*6+…+*b*2*n*)=2*n*+23+25+27+29+…+22*n*+1=2*n*+8(1+22+24+26+…+22*n*-2)=2*n*+8×**$\frac{1-4^{n}}{1-4}$**=2*n*+**$\frac{2}{3}$**×4*n*+1-**$\frac{8}{3}$***.***

4*.*★★★★☆(2024·上海模拟)已知*f*(*x*)=$\frac{1}{2}$*x*2+$\frac{1}{2}$*x*,数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,点(*n*,*Sn*)(*n*∈**N***\**)均在函数*y*=*f*(*x*)的图象上*.*

(1)求数列{*an*}的通项公式;

(2)若*g*(*x*)=$\frac{4^{x}}{4^{x}+2}$,令*bn*=*g*($\frac{a\_{n}}{2 025}$)(*n*∈**N***\**),求数列{*bn*}的前2 024项和*T*2 024*.*

**【解析】(1)因为点(*n*,*Sn*)(*n*∈N*\**)均在函数*f*(*x*)=**$\frac{1}{2}$***x*2+**$\frac{1}{2}$***x*的图象上,**

**所以*Sn*=**$\frac{1}{2}$***n*2+**$\frac{1}{2}$***n*,**

**当*n*=1时,*S*1=**$\frac{1}{2}$**+**$\frac{1}{2}$**=1,即*a*1=1,**

**当*n*≥2时,*an*=*Sn*-*Sn*-1=**$\frac{1}{2}$***n*2+**$\frac{1}{2}$***n*-[**$\frac{1}{2}$**(*n*-1)2+**$\frac{1}{2}$**(*n*-1) ]=**$\frac{1}{2}$***n*2+**$\frac{1}{2}$***n*-(**$\frac{1}{2}$***n*2-*n*+**$\frac{1}{2}$**+**$\frac{1}{2}$***n*-**$\frac{1}{2}$**)=*n*,**

**因为*a*1=1满足上式,所以*an*=*n*;**

**(2)因为*g*(*x*)=**$\frac{4^{x}}{4^{x}+2}$**,**

**所以*g*(*x*)+*g*(1-*x*)=**$\frac{4^{x}}{4^{x}+2}$**+**$\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}$**=**$\frac{4^{x}}{4^{x}+2}$**+**$\frac{4}{4+2×4^{x}}$**=**$\frac{4^{x}}{4^{x}+2}$**+**$\frac{2}{4^{x}+2}$**=1,**

**因为*an*=*n*,所以*bn*=*g*(**$\frac{a\_{n}}{2 025}$**)=*g*(**$\frac{n}{2 025}$**)(*n*∈N*\**),**

**所以*T*2 024=*b*1+*b*2+*b*3+…+*b*2 023+*b*2 024=*g*(**$\frac{1}{2 025}$**)+*g*(**$\frac{2}{2 025}$**)+*g*(**$\frac{3}{2 025}$**)+…+*g*(**$\frac{2 023}{2 025}$**)+*g*(**$\frac{2 024}{2 025}$**)①,**

**又*T*2 024=*b*2 024+*b*2 023+*b*2 022+…+*b*2+*b*1=*g*(**$\frac{2 024}{2 025}$**)+*g*(**$\frac{2 023}{2 025}$**)+*g*(**$\frac{2 022}{2 025}$**)+…+*g*(**$\frac{2}{2 025}$**)+**

***g*(**$\frac{1}{2 025}$**)②,**

**①+②,得2*T*2 024=2 024[*g*(**$\frac{1}{2 025}$**)+*g*(**$\frac{2 024}{2 024}$**) ]=2 024,所以*T*2 024=1 012*.***