**数列求和及等差、等比数列的综合应用**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 年份 | 2022 | | 2023 | | 2024 | |
| 角度 | 题号 | 角度 | 题号 | 角度 | 题号 |
| 新高考*Ⅰ*卷 | 由递推关系求通项公式与裂项相消法求和 | 17 | 求数列的通项公式与公差 | 20 | 数列的新定义问题 | 19 |
| 新高考*Ⅱ*卷 | 等差、等比数列的综合应用 | 17 | 数列的通项公式与前*n*项和的综合应用 | 18 | 数列的应用 | 19 |



【典例**1**】(13分)(规范解答)(2024·全国甲卷)已知数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,且4*Sn*=3*an*+4*.*

(1)求{*an*}的通项公式;

(2)设*bn*=(-1)*n*-1*nan*,求数列{*bn*}的前*n*项和*Tn.*

【审题思维】

(1)由已知递推关系进行转化,然后结合等比数列的通项公式即可求解;

(2)先求出*bn*,然后结合错位相减法求解*.*

**【解析】(1)因为4*Sn*=3*an*+4,所以4*Sn*+1=3*an*+1+4,两式相减可得4*an*+1=3*an*+1-3*an*, ……3分**

**即*an*+1=-3*an*,又因为4*S*1=3*a*1+4,**

**所以*a*1=4,故数列{*an*}是首项为4,公比为-3的等比数列,所以*an*=4·(-3)*n*-1; …6分**

**(2)*bn*=(-1)*n*-1*nan*=4*n*·3*n*-1, ……8分**

**所以*Tn*=4(1·30+2·31+3·32+…+*n*·3*n*-1),3*Tn*=4(1·31+2·32+3·33+…+*n*·3*n*), ……10分**

**两式相减可得:-2*Tn*=4(1+31+32+…+3*n*-1-*n*·3*n*)=4(-*n*·3*n*)=(2-4*n*)3*n*-2,**

**所以*Tn*=(2*n*-1)3*n*+1*.* ……13分**

【题后反思】

本题考查由递推关系求数列的通项公式、错位相减法的应用,解题时谨防两个易错点:

(1)由*Sn*求*an*,注意对*n*=1时对应的首项的检验;

(2)利用错位相减法求解时,不要弄错项数*.*

【典例**2**】(2024·泉州二模)已知数列{*an*}和{*bn*}的各项均为正,且*a*3=18*b*1,{*bn*}是公比为3的等比数列*.*数列{*an*}的前*n*项和*Sn*满足4*Sn*=+2*an.*

(1)求数列{*an*},{*bn*}的通项公式;

(2)设*cn*=+*an*cos *n*π,求数列{*cn*}的前*n*项和*Tn.*

【审题思维】

(1)利用递推公式可证得数列{*an*}是等差数列,可求出数列{*an*}的通项公式;利用等比数列的性质,可求出{*bn*}的通项公式;

(2)求出*cn*,根据裂项相消法和分组求和法求*Tn.*

**【解析】(1)由题设,当*n*=1时,4*S*1=+2*a*1,所以*a*1=2或*a*1=0(舍),**

**由4*Sn*=+2*an*,知4*Sn*-1=+2*an*-1,两式相减得(*an*+*an*-1)(*an*-*an*-1-2)=0,所以*an*+*an*-1=0(舍)或*an*-*an*-1-2=0,即*an*-*an*-1=2,**

**所以数列{*an*}是首项为2,公差为2的等差数列,所以*an*=2*n.*又*a*3=18*b*1=6,所以*b*1=,所以*bn*=3*n*-2*.***

**(2)*cn*=+*an*cos *n*π=+(-1)*n*2*n*=+(-1)*n*2*n***

**=(-)+(-1)*n*2*n*,**

**则*Tn*=[(-)+(-)+…+(-) ]+2([(-1+2)+(-3+4)+…+(-1)*nn*],**

**当*n*为偶数时,*Tn*=(-)+*n*;**

**当*n*为奇数时,*Tn*=(-)-(*n*+1)=--*n*-*.***

**所以*Tn*=*.***

【题后反思】

本题考查等差、等比数列通项公式的求法及裂项相消法、分组求和法,解题时需要注意:

(1)利用裂项相消法求和时,要保证相消前后等号成立;

(2)当通项公式中出现(-1)*n*,(-1)*n*+1,求和时常按奇偶讨论*.*



1*.*★★★☆☆(2024·成都模拟)记数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,已知2*Sn*=*n*2+*an*+*a*1-1*.*

(1)若*a*1≠1,证明:{*an*-*n*}是等比数列;

(2)若*a*2是*a*1和*a*3的等差中项,设*bn*=,求数列{*bn*}的前*n*项和*Tn.*

**【解析】(1)对2*Sn*=*n*2+*an*+*a*1-1①,当*n*≥2时,有2*Sn*-1=(*n*-1)2+*an*-1+*a*1-1②,**

**①-②:2(*Sn*-*Sn*-1)=2*n*-1+*an*-*an*-1,即2*an*=2*n*-1+*an*-*an*-1,**

**经整理,可得*an*-*n*=(-1)[*an*-1-(*n*-1)],*a*1≠1,故{*an*-*n*}是以*a*1-1为首项、-1为公比的等比数列*.***

**(2)由(1)知*an*-*n*=(-1)*n*-1(*a*1-1),有*a*2=3-*a*1,*a*3=*a*1+2,**

**由题设知2*a*2=*a*1+*a*3,即2(3-*a*1)=*a*1+(*a*1+2),则*a*1=1,故*an*=*n.***

**而*bn*===(-),**

***Tn*=*b*1+*b*2+…+*bn*-1+*bn*=(-+-+…+-+-)=(+--),**

**故*Tn*=-(+)*.***

2*.*★★★☆☆(2024·绍兴三模)已知数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,且*a*1=2,*Sn*=*an*+1,设*bn*=*.*

(1)求证:数列{*bn*}为等比数列;

(2)求数列{*Sn*}的前*n*项和*Tn.*

**【解析】(1)*Sn*=*an*+1=(*Sn*+1-*Sn*),即(*n*+2)*Sn*=*n*(*Sn*+1-*Sn*),即*nSn*+1=(2*n*+2)*Sn*,则=,即=,**

**即*bn*+1=2*bn*,又*b*1==*a*1=2,**

**故数列{*bn*}是以2为首项、以2为公比的等比数列;**

**(2)由(1)得*bn*=2*n*,即=2*n*,则*Sn*=*n*·2*n*,**

**则*Tn*=1·21+2·22+…+*n*·2*n*,**

**有2*Tn*=1·22+2·23+…+*n*·2*n*+1,**

**则*Tn*-2*Tn*=-*Tn*=2+22+23+…+2*n*-*n*·2*n*+1=-*n*·2*n*+1=2*n*+1-2-*n*·2*n*+1=(1-*n*)·2*n*+1-2,故*Tn*=(*n*-1)·2*n*+1+2*.***

3*.*★★★☆☆(2024·安康模拟)记*Sn*为数列{*an*}的前*n*项和,已知*a*1=1,*nSn*+1-(*n*+1)*Sn*=*n*2+*n.*

(1)求{*an*}的通项公式;

(2)若*bn*=(-1)*nan*+2*n*,求数列{*bn*}的前2*n*项和*T*2*n.*

**【解析】(1)由*nSn*+1-(*n*+1)*Sn*=*n*2+*n*,可得*nSn*+1-(*n*+1)*Sn*=*n*(*n*+1),**

**所以-=1,又由*a*1=1,所以==1,所以数列{}是以1为首项,1为公差的等差数列,**

**所以=1+(*n*-1)×1=*n*,则*Sn*=*n*2,**

**当*n*≥2时,*Sn*-1=(*n*-1)2,所以*Sn*-*Sn*-1=*an*=*n*2-(*n*-1)2=2*n*-1,**

**又当*n*=1时,*a*1=1满足上式,**

**所以{*an*}的通项公式为*an*=2*n*-1*.***

**(2)由(1)可知,当*n*为奇数时,*bn*=-*an*=1-2*n*;当*n*为偶数时,*bn*=*an*+2×2*n*=2*n*-1+2*n*+1,所以*T*2*n*=*b*1+*b*2+*b*3+*b*4+…+*b*2*n*=(*b*1+*b*3+*b*5+…+*b*2*n*-1)+(*b*2+*b*4+*b*6+…+*b*2*n*)=2*n*+23+25+27+29+…+22*n*+1=2*n*+8(1+22+24+26+…+22*n*-2)=2*n*+8×=2*n*+×4*n*+1-*.***

4*.*★★★★☆(2024·上海模拟)已知*f*(*x*)=*x*2+*x*,数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*,点(*n*,*Sn*)(*n*∈**N***\**)均在函数*y*=*f*(*x*)的图象上*.*

(1)求数列{*an*}的通项公式;

(2)若*g*(*x*)=,令*bn*=*g*()(*n*∈**N***\**),求数列{*bn*}的前2 024项和*T*2 024*.*

**【解析】(1)因为点(*n*,*Sn*)(*n*∈N*\**)均在函数*f*(*x*)=*x*2+*x*的图象上,**

**所以*Sn*=*n*2+*n*,**

**当*n*=1时,*S*1=+=1,即*a*1=1,**

**当*n*≥2时,*an*=*Sn*-*Sn*-1=*n*2+*n*-[(*n*-1)2+(*n*-1) ]=*n*2+*n*-(*n*2-*n*++*n*-)=*n*,**

**因为*a*1=1满足上式,所以*an*=*n*;**

**(2)因为*g*(*x*)=,**

**所以*g*(*x*)+*g*(1-*x*)=+=+=+=1,**

**因为*an*=*n*,所以*bn*=*g*()=*g*()(*n*∈N*\**),**

**所以*T*2 024=*b*1+*b*2+*b*3+…+*b*2 023+*b*2 024=*g*()+*g*()+*g*()+…+*g*()+*g*()①,**

**又*T*2 024=*b*2 024+*b*2 023+*b*2 022+…+*b*2+*b*1=*g*()+*g*()+*g*()+…+*g*()+**

***g*()②,**

**①+②,得2*T*2 024=2 024[*g*()+*g*() ]=2 024,所以*T*2 024=1 012*.***