**大题冲刺篇·9个高考重点务必要破解！**

**三角函数与解三角形**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 年份 | 2022 | 2023 | 2024 |
| 角度 | 题号 | 角度 | 题号 | 角度 | 题号 |
| 新高考Ⅰ卷 | 求三角形的角与代数式的最值 | 18 | 求三角形的角的正弦值与高 | 17 | 求三角形的角与边 | 15 |
| 新高考Ⅱ卷 | 求三角形的边与面积 | 18 | 求三角形的角的正切值与边 | 17 | 求三角形的角与周长 | 15 |



【典例**1**】(13分)(规范解答)(2024·新高考*Ⅰ*卷)记△*ABC*的内角*A*,*B*,*C*的对边分别为*a*,*b*,*c*,已知sin *C*=$\sqrt{2}$cos *B*,*a*2+*b*2-*c*2=$\sqrt{2}$*ab.*

(1)求*B*;

(2)若△*ABC*的面积为3+$\sqrt{3}$,求*c.*

【审题思维】

(1)利用余弦定理结合*a*2+*b*2-*c*2=$\sqrt{2}$*ab*,求得*C*,再由sin *C*=$\sqrt{2}$cos *B*算出cos *B*,结合*B*∈(0,π),可得角*B*的大小;

(2)设△*ABC*的外接圆半径为*R*,由△*ABC*的面积为3+$\sqrt{3}$,建立关于*R*的方程,解出*R*的值,进而利用正弦定理算出边*c*的值*.*

**【解析】(1)因为*a*2+*b*2-*c*2=**$\sqrt{2}$***ab*,所以cos *C*=**$\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}$**=**$\frac{\sqrt{2}ab}{2ab}$**=**$\frac{\sqrt{2}}{2}$**,结合*C*为三角形的内角,可得*C*=**$\frac{π}{4}$***.*** …………**3分**

**因为sin *C*=**$\sqrt{2}$**cos *B*=**$\frac{\sqrt{2}}{2}$**,所以cos *B*=**$\frac{1}{2}$**,结合*B*∈(0,π),得*B*=**$\frac{π}{3}$**;** ……**6分**

**(2)由(1)可知*A*=π-*B*-*C*=**$\frac{5π}{12}$**,设△*ABC*的外接圆半径为*R*,由正弦定理得*b*=2*R*sin *B*=**$\sqrt{3}$***R*,*c*=2*R*sin *C*=**$\sqrt{2}$***R*,** …………**9分**

**由*S*△*ABC*=**$\frac{1}{2}$***bc*sin *A*=3+**$\sqrt{3}$**,得**$\frac{1}{2}$**·**$\sqrt{3}$***R*·**$\sqrt{2}$***R*·sin** $\frac{5π}{12}$**=3+**$\sqrt{3}$**,** ……**11分**

**即**$\frac{\sqrt{6}R^{2}}{2}$**·**$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$**=3+**$\sqrt{3}$**,解得*R*2=4,所以*R*=2(舍负),可得*c*=**$\sqrt{2}$***R*=2**$\sqrt{2}$***.*** ……**13分**

【题后反思】

本题考查正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式及其应用*.*

(1)若条件式中含有角的余弦或边的二次式,常选择使用余弦定理,若条件式中含有角的正弦或边的一次式,常选择使用正弦定理*.*

(2)要根据已知条件灵活选用三角形的面积公式*.*

【典例**2**】(2024·盐城模拟)在△*ABC*中,已知角*A*,*B*,*C*所对的边分别为*a*,*b*,*c*,*a*sin2$\frac{B}{2}$+*b*sin2$\frac{A}{2}$=$\frac{3ab}{2(a+b+c)}$*.*

(1)求角*C*的大小;

(2)若△*ABC*为锐角三角形,求$\frac{a+b}{c}$的取值范围*.*

【审题思维】

(1)由二倍角的正弦和余弦公式,结合余弦定理将角转化为边,可将式子变形为*a*2+*b*2-*c*2=*ab*,再利用余弦定理求解;

(2)利用正弦定理将边转化为角,再结合三角恒等变换可得$\frac{a+b}{c}$=2sin(*A*+$\frac{π}{6}$),根据锐角三角形可得*A*的取值范围,结合三角函数的图象和性质求解*.*

**【解析】(1)在△*ABC*中,*a*sin2**$\frac{B}{2}$**+*b*sin2**$\frac{A}{2}$**=**$\frac{a(1-cosB)}{2}$**+**$\frac{b(1-cosA)}{2}$**=**$\frac{a+b}{2}$**-**$\frac{acosB+bcosA}{2}$

**=**$\frac{a+b}{2}$**-**$\frac{1}{2}$**(*a*cos *B*+*b*cos *A*)=**$\frac{a+b}{2}$**-**$\frac{1}{2}$**(*a*×**$\frac{a^{2}+c^{2}-b^{2}}{2ac}$**+*b*×**$\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}$**)=**$\frac{a+b-c}{2}$**,**

**因为*a*sin2**$\frac{B}{2}$**+*b*sin2**$\frac{A}{2}$**=**$\frac{3ab}{2(a+b+c)}$**,所以**$\frac{a+b-c}{2}$**=**$\frac{3ab}{2(a+b+c)}$**,**

**化简得*a*2+*b*2-*c*2=*ab*,由余弦定理得cos *C*=**$\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}$**=**$\frac{1}{2}$**,**

**又*C*∈(0,π),所以*C*=**$\frac{π}{3}$**;**

**(2)由正弦定理知**$\frac{a+b}{c}$**=**$\frac{sinA+sinB}{sinC}$**=**$\frac{sinA+sin(\frac{2π}{3}-A)}{sin \frac{π}{3}}$**=**$\frac{2}{\sqrt{3}}$**(sin *A*+**$\frac{\sqrt{3}}{2}$**cos *A*+**$\frac{1}{2}$**sin *A*)**

**=**$\frac{2}{\sqrt{3}}$**(**$\frac{3}{2}$**sin *A*+**$\frac{\sqrt{3}}{2}$**cos *A*)**

**=2(**$\frac{\sqrt{3}}{2}$**sin *A*+**$\frac{1}{2}$**cos *A*)=2sin(*A*+**$\frac{π}{6}$**),**

**由△*ABC*为锐角三角形可知**$\left\{\begin{matrix}0<A<\frac{π}{2}\\0<B<\frac{π}{2}\end{matrix}\right.$**,而*C*=**$\frac{π}{3}$**,**

**所以**$\left\{\begin{matrix}0<A<\frac{π}{2}\\0<\frac{2π}{3}-A<\frac{π}{2}\end{matrix}\right.$**,**

**得**$\frac{π}{6}$**<*A*<**$\frac{π}{2}$**,所以**$\frac{π}{3}$**<*A*+**$\frac{π}{6}$**<**$\frac{2π}{3}$**,**

**所以**$\frac{\sqrt{3}}{2}$**<sin(*A*+**$\frac{π}{6}$**)≤1,**

**即**$\sqrt{3}$**<2sin(*A*+**$\frac{π}{6}$**)≤2,**

**则**$\frac{a+b}{c}$**的取值范围为**$\left(\sqrt{3},2\right]$***.***

【题后反思】

本题考查正弦定理、余弦定理、三角恒等变换公式及其应用*.*

(1)三角函数变形的三个统一原则:统一角的大小,统一函数名称,统一结构形式*.*

(2)解三角形中的最值或范围问题常用的方法:基本不等式法与三角函数性质法*.*



1*.*★★★☆☆(2024·新高考*Ⅱ*卷)记△*ABC*的内角*A*,*B*,*C*的对边分别为*a*,*b*,*c*,已知:sin *A*+$\sqrt{3}$cos *A*=2*.*

(1)求*A*;

(2)若*a*=2,$\sqrt{2}$*b*sin *C*=*c*sin 2*B*,求△*ABC*的周长*.*

**【解析】(1)2**($\frac{1}{2}$**sin *A*+**$\frac{\sqrt{3}}{2}$**cos *A***)**=2,sin**(***A*+**$\frac{π}{3}$)**=1,**

**所以*A*+**$\frac{π}{3}$**=**$\frac{π}{2}$**,所以*A*=**$\frac{π}{6}$***.***

**(2)因为**$\sqrt{2}$**sin *B*sin *C*=sin *C*sin 2*B*,所以**$\sqrt{2}$**=2cos *B*,所以cos *B*=**$\frac{\sqrt{2}}{2}$**,**

**所以*B*=**$\frac{π}{4}$**,*C*=**$\frac{7π}{12}$***.***

**由**$\frac{a}{sinA}$**=**$\frac{b}{sinB}$**=**$\frac{c}{sinC}$**得**$\frac{2}{\frac{1}{2}}$**=**$\frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$**=**$\frac{c}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$**,**

**所以*b*=2**$\sqrt{2}$**,*c*=**$\sqrt{6}$**+**$\sqrt{2}$**,△*ABC*的周长为2+**$\sqrt{6}$**+3**$\sqrt{2}$***.***

2*.*★★★☆☆(2024·芜湖三模)已知*a*,*b*,*c*分别为△*ABC*三个内角*A*,*B*,*C*的对边,且*b*cos *A*+$\sqrt{3}$*b*sin *A*=*a*+*c.*

(1)求*B*;

(2)若*b*=2,△*ABC*的面积为$\sqrt{3}$,*D*为*AC*边上一点,满足*CD*=2*AD*,求*BD*的长*.*

**【解析】(1)由正弦定理有sin *B*cos *A*+**$\sqrt{3}$**sin *B*sin *A*=sin *A*+sin *C*,**

**因为sin *C*=sin(*A*+*B*)=sin *A*cos *B*+cos *A*sin *B*,**

**所以sin *B*cos *A*+**$\sqrt{3}$**sin *B*sin *A*=sin *A*+sin *A*cos *B*+cos *A*sin *B*,化简得**$\sqrt{3}$**sin *B*sin *A*=sin *A*+sin *A*cos *B*,**

**由*A*∈(0,π),sin *A*≠0有**$\sqrt{3}$**sin *B*=1+cos *B*,可得sin**(***B*-**$\frac{π}{6}$)**=**$\frac{1}{2}$**,**

**因为*B*∈(0,π),*B*-**$\frac{π}{6}$**∈**(**-**$\frac{π}{6}$**,**$\frac{5π}{6}$)**,**

**所以*B*-**$\frac{π}{6}$**=**$\frac{π}{6}$**,则*B*=**$\frac{π}{3}$***.***

**(2)由*B*=**$\frac{π}{3}$**,*S*=**$\frac{1}{2}$***ac*sin *B*=**$\sqrt{3}$**有*ac*=4,又*b*2=*a*2+*c*2-2*ac*cos *B*可得*a*2+*c*2=8,**

**联立**$\left\{\begin{matrix}a^{2}+c^{2}=8\\ac=4\end{matrix}\right.$**,解得*a*=*c*=2,所以△*ABC*为正三角形,所以*AD*=**$\frac{2}{3}$**,*A*=**$\frac{π}{3}$**,在△*ABD*中,由余弦定理得*BD*2=22+**($\frac{2}{3}$)**2-2×2×**$\frac{2}{3}$**×**$\frac{1}{2}$**=**$\frac{28}{9}$***.***

**故*BD*的长为**$\frac{2\sqrt{7}}{3}$***.***

****

3*.*★★★☆☆(2024·北京高考)在△*ABC*中,*a*=7,*A*为钝角,sin 2*B*=$\frac{\sqrt{3}}{7}$*b*cos *B.*

(1)求*A*;

(2)从条件①、条件②和条件③这三个条件中选择一个作为已知,求△*ABC*的面积*.*

①*b*=7;

②cos *B*=$\frac{13}{14}$;

③*c*sin *A*=$\frac{5}{2}\sqrt{3}$*.*

注:如果选择条件①、条件②和条件③分别解答,按第一个解答计分*.*

**【解析】(1)因为sin 2*B*=**$\frac{\sqrt{3}}{7}$***b*cos *B*=2sin *B*cos *B*,cos *B*≠0,**

**所以sin *B*=**$\frac{\sqrt{3}}{14}$***b*,**

**在△*ABC*中,由正弦定理得**$\frac{a}{sinA}$**=**$\frac{b}{sinB}$**,**

**因为*a*=7,所以sin *A*=**$\frac{\sqrt{3}}{2}$**,**

**因为*A*为钝角,所以*A*=**$\frac{2π}{3}$***.***

**(2)若选条件①,因为*b*=7,*a*=7,**

**所以*B*=*A*=**$\frac{2π}{3}$**与*A*+*B*+*C*=π矛盾,故不合题意,舍去;**

**若选条件②,因为cos *B*=**$\frac{13}{14}$**,所以sin *B*=**$\sqrt{1-cos^{2}B}$**=**$\frac{3\sqrt{3}}{14}$**,在△*ABC*中,由正弦定理得**$\frac{a}{sinA}$**=**$\frac{b}{sinB}$**,**

**所以*b*=**$\frac{a}{sinA}$**·sin *B*=**$\frac{7}{sin \frac{2π}{3}}$**×**$\frac{3\sqrt{3}}{14}$**=3,又sin *C*=sin(*A*+*B*)=sin *A*cos *B*+cos *A*sin *B***

**=**$\frac{\sqrt{3}}{2}$**×**$\frac{13}{14}$**+(-**$\frac{1}{2}$**)×**$\frac{3\sqrt{3}}{14}$**=**$\frac{5\sqrt{3}}{14}$**,**

**所以△*ABC*的面积*S*=**$\frac{1}{2}$***ab*sin *C*=**$\frac{1}{2}$**×7×3×**$\frac{5\sqrt{3}}{14}$**=**$\frac{15\sqrt{3}}{4}$**;**

**若选条件③,由(1)知*A*=**$\frac{2π}{3}$**,**

**因为*c*sin *A*=**$\frac{5}{2}\sqrt{3}$**,所以*c*=5,**

**由余弦定理得*a*2=*b*2+*c*2-2*bc*cos *A*,**

**即72=*b*2+52-2*b*×5×cos** $\frac{2π}{3}$**,解得*b*=3,**

**所以*S*△*ABC*=**$\frac{1}{2}$***bc*sin *A*=**$\frac{1}{2}$**×3×5×sin** $\frac{2π}{3}$**=**$\frac{15\sqrt{3}}{4}$***.***

4*.*★★★☆☆(2022·新高考*Ⅰ*卷)记△*ABC*的内角*A*,*B*,*C*的对边分别为*a*,*b*,*c*,已知$\frac{cosA}{1+sinA}$=$\frac{sin2B}{1+cos2B}$*.*

(1)若*C*=$\frac{2π}{3}$,求*B*;

(2)求$\frac{a^{2}+b^{2}}{c^{2}}$的最小值*.*

**【解析】(1)因为**$\frac{cosA}{1+sinA}$**=**$\frac{sin2B}{1+cos2B}$**=**$\frac{2sinBcosB}{2cos^{2}B}$**=**$\frac{sinB}{cosB}$**,即sin *B*=cos *A*cos *B*-sin *A*sin *B*=cos(*A*+*B*)=-cos *C*=**$\frac{1}{2}$**,**

**而0<*B*<**$\frac{π}{2}$**,所以*B*=**$\frac{π}{6}$**;**

**(2)由(1)知,sin *B*=-cos *C*>0,**

**所以**$\frac{π}{2}$**<*C*<π,0<*B*<**$\frac{π}{2}$**,**

**而sin *B*=-cos *C*=sin(*C*-**$\frac{π}{2}$**),**

**所以*C*=**$\frac{π}{2}$**+*B*,即有*A*=**$\frac{π}{2}$**-2*B.***

**所以**$\frac{a^{2}+b^{2}}{c^{2}}$**=**$\frac{sin^{2}A+sin^{2}B}{sin^{2}C}$**=**$\frac{cos^{2}2B+1-cos^{2}B}{cos^{2}B}$

**=**$\frac{(2cos^{2}B-1)^{2}+1-cos^{2}B}{cos^{2}B}$**=4cos2*B*+**$\frac{2}{cos^{2}B}$**-5≥2**$\sqrt{8}$**-5=4**$\sqrt{2}$**-5*.***

**当且仅当cos2*B*=**$\frac{\sqrt{2}}{2}$**时取等号,所以**$\frac{a^{2}+b^{2}}{c^{2}}$**的最小值为4**$\sqrt{2}$**-5*.***