**2024-2025学年河南省部分名校高二下学期3月大联考**

**数学试卷**

一、单选题：本题共**8**小题，每小题**5**分，共**40**分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知函数$f(x)=−\frac{m}{x}$，$f′(x)$为$f(x)$的导函数，且$f′(1)=2$，则实数$m=$(    )

A. $0$ B. $\frac{1}{2}$ C. $1$ D. $2$

2.双曲线$C:\frac{x^{2}}{12}−\frac{y^{2}}{3}=1$的渐近线方程为(    )

A. $y=\pm \frac{1}{4}x$ B. $y=\pm \frac{1}{2}x$ C. $y=\pm 2x$ D. $y=\pm 4x$

3.已知$\{a\_{n}\}$是等比数列，若$a\_{3}a\_{8}=2a\_{5}$，$a\_{9}=16$，则$\{a\_{n}\}$的公比$q=$(    )

A. $4$ B. $2$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

4.已知矩形$ABCD$的边$AB$所在直线的方程为$2x−y+4=0$，顶点$D(0,−1)$，则顶点$A$的坐标为(    )

A. $(−2,0)$ B. $(−1,0)$ C. $(1,0)$ D. $(2,0)$

5.若存在$a\in R$，使得直线$ax+2y−b=0$与圆$C:x^{2}+(y+1)^{2}=1$相切，则实数$b$的取值范围为(    )

A. $(−\infty ,−4]$ B. $[0,+\infty )$
C. $[−4,0]$ D. $(−\infty ,−4]∪[0,+\infty )$

6.在正四棱柱$ABCD−A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$中，$AA\_{1}=2AB=4$，$E$，$F$分别为$AB\_{1}$，$BC\_{1}$的中点，点$G$为上底面$A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$的中心，则直线$EG$与$DF$夹角的余弦值为(    )

A. $\frac{\sqrt[ ]{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt[ ]{5}}{3}$ C. $\frac{\sqrt[ ]{3}}{5}$ D. $\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}$

7.已知某圆柱的表面积为$4π$，则该圆柱的体积的最大值为(    )

A. $\frac{2\sqrt[ ]{6}}{3}π$ B. $\frac{5\sqrt[ ]{6}}{9}π$ C. $\frac{4\sqrt[ ]{6}}{9}π$ D. $\frac{\sqrt[ ]{6}}{3}π$

8.已知$a>1$，函数$f(x)=1+log\_{a}x$，$g(x)=a^{2}x^{2}$，当$x>0$时，函数$f(x)$的图象始终在函数$g(x)$的图象下方$($所有点均不重合$)$，则实数$a$的取值范围为(    )

A. $(1,e^{\frac{1}{2e}})$ B. $(1,e^{\frac{1}{e}})$ C. $(e^{\frac{1}{2e}},+\infty )$ D. $(e^{\frac{1}{e}},+\infty )$

二、多选题：本题共**3**小题，共**18**分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

9.记$S\_{n}$为等差数列$\{a\_{n}\}$的前$n$项和，已知$a\_{7}=4$，$S\_{9}=0$，则下列结论正确的有(    )

A. $a\_{1}=−10$ B. $a\_{n}=2n−10$
C. $S\_{20}=220$ D. 数列$\{S\_{n}\}$中有且仅有一个最小项

10.已知函数$f(x)=m(x−1)^{n}(x−m)(m\ne 0,n\in N^{∗})$，则下列结论正确的有(    )

A. 当$n=1$，$m<0$时，$f(x)$只有最大值，无最小值

B. 当$n=1$，$m>0$时，$f(x)$有两个极值点
C. 当$n=2$，$m>1$时，$x=1$是$f(x)$的极大值点
D. 当$n=2$，$0<m<1$时，$∀x>1$，$f(x)>f(\sqrt[ ]{x})$

11.已知点$P(x\_{0},y\_{0})$在曲线$C:x^{4}−2x^{2}+y^{2}=0$上，点$F(1,0)$，则下列结论正确的有(    )

A. 曲线$C$关于原点对称
B. $−\sqrt[ ]{2}\leq x\_{0}\leq \sqrt[ ]{2}$
C. $|PF|$的最小值为$1$
D. 曲线$C$与$x$轴的非负半轴、直线$x=1$所围成区域的面积大于$\frac{1}{2}$

三、填空题：本题共**3**小题，每小题**5**分，共**15**分。

12.已知$m\in R$，向量$\vec{a}=(1,m,−2)$，$\vec{b}=(m,2,3)$，若$\vec{a}⋅\vec{b}=6$，则$|\vec{a}|=$          ．

13.已知圆$C\_{1}:x^{2}+y^{2}=4$与圆$C\_{2}:x^{2}+y^{2}+2x−y−6=0$的相交弦所在直线为$l$，若$l$与抛物线$y^{2}=4x$交于$A$，$B$两点，则$|AB|=$          ．

14.数列$\{a\_{n}\}$的通项公式为$a\_{n}=(2n−1)⋅4^{n}$，则$\{a\_{n}\}$的前$n$项和$S\_{n}$为          $($用含$n$的式子表示$)$．

四、解答题：本题共**5**小题，共**60**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.$($本小题$12$分$)$

已知函数$f(x)=\frac{e^{x}}{x−a}(a>0)$，曲线$y=f(x)$在$(0,f(0))$处切线的斜率为$−2$．

$(1)$求实数$a$的值$;$

$(2)$研究$f(x)$的单调性$;$

$(3)$求$f(x)$的极值．

16.$($本小题$12$分$)$
如图，四棱锥$P−ABCD$的底面为菱形，$∠BAD=60^{∘}$，且侧面$PAB$是边长为$2$的等边三角形$.$取$AB$的中点$E$，连接$PE$，$DE$．


$(1)$证明：$AB⊥$平面$PDE;$

$(2)$证明：$△PCD$为直角三角形$;$

$(3)$若$PD=\sqrt[ ]{3}$，求直线$PB$与平面$PCD$所成角的正弦值．

17.$($本小题$12$分$)$

已知正项数列$\{a\_{n}\}$中，$a\_{1}=\frac{2}{3}$，$3^{n+1}(a\_{n+1}−a\_{n})=2$．

$(1)$证明：数列$\{1+3^{n}a\_{n}\}$是等比数列$;$

$(2)$求数列$\{a\_{n}\}$的通项公式$;$

$(3)$设$b\_{n}=[log\_{3}(1−a\_{n})]^{2}$，证明：$\frac{4}{b\_{1}}+\frac{4}{b\_{2}}+\cdots +\frac{4}{b\_{n}}<7$．

18.$($本小题$12$分$)$

已知椭圆$C:\frac{y^{2}}{a^{2}}+\frac{x^{2}}{b^{2}}=1(a>b>0)$的下焦点为$F(0,−2)$，其离心率为$\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}$．

$(1)$求椭圆$C$的标准方程$;$

$(2)$过$F$的直线与椭圆$C$交于$P$，$Q$两点$($直线$PQ$与坐标轴不垂直$)$，过$P$，$Q$作$y$轴的垂线，垂足分别为$M$，$N$，若直线$PN$与$QM$交于点$H$，证明：点$H$的纵坐标为定值．

19.$($本小题$12$分$)$

定义函数$T\_{n}(x)$满足$T\_{n}(cosx)=cosnx$，且$T\_{n}(x)$的定义域均为$[−1,1]$，$n\in N^{∗}.$已知函数$f(x)=\frac{1}{2}T\_{1}(x)⋅[T\_{2}(x)+1]lnx.$

$(1)$求$f(x)$的解析式和定义域$;$

$(2)$求$f(x)$的最小值$;$

$(3)$若$x\_{1}$，$x\_{2}(0<x\_{1}<x\_{2})$是$f(x)=a(a<0)$的两个实根，证明：$a(\frac{2}{x\_{1}^{3}}+\frac{1}{x\_{2}^{3}})<−1$．

**参考答案**

1.$D$

2.$B$

3.$B$

4.$A$

5.$D$

6.$A$

7.$C$

8.$C$

9.$BC$

10.$ACD$

11.$ABD$

12.$\sqrt[ ]{21}$

13.$5$

14.$\frac{20}{9}+\frac{6n−5}{9}⋅4^{n+1}$

15.解：$(1)f(x)=\frac{e^{x}}{x−a}(a>0)$，所以$f′(x)=\frac{x−a−1}{(x−a)^{2}}e^{x}$，由题意可知，$f′(0)=\frac{−a−1}{a^{2}}=−2$，
解得$a=1$或$a=−\frac{1}{2}($舍去$)$，故实数$a$的值为$1$；
$(2)(2)f(x)$的定义域为$\{x|x\ne 1\}$，
由$(1)$可知，$f′(x)=\frac{x−2}{(x−1)^{2}}e^{x}$，
令$f′(x)=0$，解得$x=2$，当$x\in (−\infty ,1)∪(1,2)$时，$f′(x)<0$，当$x\in (2,+\infty )$时，$f′(x)>0$，
故$f(x)$在$(−\infty ,1)$，$(1,2)$上单调递减，在$(2,+\infty )$上单调递增，
$(3)$由$(2)$知，$f(x)$在$(1,2)$上单调递减，在$(2,+\infty )$上单调递增，
故$f(x)$在$x=2$处取得极小值，极小值为$f(2)=\frac{e^{2}}{2−1}=e^{2}$，无极大值．

16.$(1)$证明：因为侧面$PAB$是等边三角形，$E$为$AB$的中点，所以$PE⊥AB$．
因为四边形$ABCD$为菱形，且$∠BAD=60^{∘}$，所以$DE⊥AB$．
又$PE∩DE=E$，$PE$，$DE⊂$平面$PDE$，$AB⊂$平面$PDE$，所以$AB⊥$平面$PDE$．
$(2)$证明：因为$AB/​/CD$，所以$CD⊥$平面$PDE$．
又$PD⊂$平面$PDE$，所以$CD⊥PD$，故$△PCD$为直角三角形．
$(3)$解：因为$AB⊂$平面$ABCD$，故由$(1)$可知，平面$PDE⊥$平面$ABCD$，易求$PE=DE=\sqrt[ ]{3}$，
又$PD=\sqrt[ ]{3}$，所以$△PDE$为等边三角形，
取$DE$的中点$O$，连接$OP$，则$OP⊥DE$，
因为$DE$为平面$ABCD$与平面$PED$的交线，$OP⊂$平面$PED$，
所以$OP⊥$平面$ABCD$．
以$O$为坐标原点，平行于$AB$的直线为$x$轴，直线$OD$，$OP$分别为$y$轴、$z$轴，建立如图所示的空间直角坐标系$O−xyz$，

则$B(1,−\frac{\sqrt[ ]{3}}{2},0)$，$C(2,\frac{\sqrt[ ]{3}}{2},0)$，$D(0,\frac{\sqrt[ ]{3}}{2},0)$，$P(0,0,\frac{3}{2})$，$\vec{PB}=(1,−\frac{\sqrt[ ]{3}}{2},−\frac{3}{2})$，$\vec{CD}=(−2,0,0)$，$\vec{PD}=(0,\frac{\sqrt[ ]{3}}{2},−\frac{3}{2})$，
设平面$PCD$的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，由$\left\{\begin{matrix}\vec{CD}⋅\vec{m}=−2x=0,\\\vec{PD}⋅\vec{m}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}y−\frac{3}{2}z=0,\end{matrix}\right.$
取$z=1$，得$\vec{m}=(0,\sqrt[ ]{3},1)$．
设直线$PB$与平面$PCD$所成的角为$θ$，则$sinθ=|cos<\vec{m}$，$\vec{PB}>|=\frac{|\vec{m}⋅\vec{PB}|}{|\vec{m}||\vec{PB}|}=\frac{3}{2×2}=\frac{3}{4}$，
故直线$PB$与平面$PCD$所成角的正弦值为$\frac{3}{4}$．

17.$(1)$证明：由$3^{n+1}(a\_{n+1}−a\_{n})=2$得，$3^{n+1}a\_{n+1}=2+3^{n+1}a\_{n}$，
则$1+3^{n+1}a\_{n+1}=3+3^{n+1}a\_{n}=3×(1+3^{n}a\_{n})$，
因为$a\_{n}>0$，所以$\frac{1+3^{n+1}a\_{n+1}}{1+3^{n}a\_{n}}=3$，
又$1+3a\_{1}=1+3×\frac{2}{3}=3$，故数列$\{1+3^{n}a\_{n}\}$是首项为$3$，公比为$3$的等比数列．
$(2)$解：由$(1)$可知，$1+3^{n}a\_{n}=3×3^{n−1}=3^{n}$，故$a\_{n}=\frac{3^{n}−1}{3^{n}}=1−(\frac{1}{3})^{n}$．
$(3)$证明：由$(2)$得，$b\_{n}=[log\_{3}(1−a\_{n})]^{2}=[log\_{3}(\frac{1}{3})^{n}]^{2}=n^{2}$，
当$n=1$时，$\frac{4}{b\_{1}}=4<7$，不等式成立$;$
当$n=2$时，$\frac{4}{b\_{1}}+\frac{4}{b\_{2}}=4+\frac{4}{2^{2}}=5<7$，不等式成立$;$
当$n\geq 3$时，$\frac{1}{n^{2}}<\frac{1}{n(n−1)}=\frac{1}{n−1}−\frac{1}{n}$，
所以$\frac{4}{b\_{1}}+\frac{4}{b\_{2}}+\cdots +\frac{4}{b\_{n}}<4[1+\frac{1}{2^{2}}+(\frac{1}{2}−\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}−\frac{1}{4})+\cdots +(\frac{1}{n−1}−\frac{1}{n})]<5+(2−\frac{4}{n})=7−\frac{4}{n}<7$，
综上可知，$\frac{4}{b\_{1}}+\frac{4}{b\_{2}}+\cdots +\frac{4}{b\_{n}}<7$．

18.解：$(1)$由题意可知，$\left\{\begin{matrix}a^{2}−b^{2}=4,\\\frac{2}{a}=\frac{\sqrt[ ]{2}}{2},\end{matrix}\right.$解得$a^{2}=8$，$b^{2}=4$，
故椭圆$C$的标准方程为$\frac{y^{2}}{8}+\frac{x^{2}}{4}=1$；
$(2)$证明：设直线$PQ$的方程为$y=kx−2(k\ne 0)$，$P(x\_{1},y\_{1})$，$Q(x\_{2},y\_{2})$，则$M(0,y\_{1})$，$N(0,y\_{2})$，
由$\left\{\begin{matrix}\frac{y^{2}}{8}+\frac{x^{2}}{4}=1,\\y=kx−2,\end{matrix}\right.$得$(k^{2}+2)x^{2}−4kx−4=0$，显然，$Δ>0$，
则$x\_{1}+x\_{2}=\frac{4k}{k^{2}+2}$，$x\_{1}x\_{2}=−\frac{4}{k^{2}+2}$，
易知直线$PN$与$QM$的斜率均存在，则直线$PN$的方程为$y=−\frac{y\_{2}−y\_{1}}{x\_{1}}x+y\_{2} ①$，
直线$QM$的方程为$y=\frac{y\_{2}−y\_{1}}{x\_{2}}x+y\_{1} ②$，
联立$ ①) ②$消去$x$得，$y=\frac{x\_{1}y\_{2}+x\_{2}y\_{1}}{x\_{1}+x\_{2}}$
$=\frac{x\_{1}(kx\_{2}−2)+x\_{2}(kx\_{1}−2)}{x\_{1}+x\_{2}}=−2+\frac{2kx\_{1}x\_{2}}{x\_{1}+x\_{2}}=−2+\frac{−\frac{8k}{k^{2}+2}}{\frac{4k}{k^{2}+2}}=−4$，
故点$H$的纵坐标为定值$−4$．

19.解：$(1)$由题意得，$T\_{1}(cosx)=cosx$，故$T\_{1}(x)=x$，
又$T\_{2}(cosx)=cos2x=2cos^{2}x−1$，所以$T\_{2}(x)=2x^{2}−1$，
故$f(x)=x^{3}lnx$，$f(x)$的定义域为$(0,1]$．
$(2)f′(x)=3x^{2}lnx+x^{2}=x^{2}(3lnx+1)$，
令$f′(x)=0$，解得$x=e^{−\frac{1}{3}}$，
当$x\in (0,e^{−\frac{1}{3}})$时，$f′(x)<0$，$f(x)$单调递减$;$当$x\in (e^{−\frac{1}{3}},1]$时，$f′(x)>0$，$f(x)$单调递增，
故$f(x)\_{min}=f(e^{−\frac{1}{3}})=(e^{−\frac{1}{3}})^{3}lne^{−\frac{1}{3}}=−\frac{1}{3e}$；
$(3)$证明：因为$x\_{1}$，$x\_{2}(0<x\_{1}<x\_{2})$是$f(x)=a$的两个实根，
所以$x\_{1}^{3}lnx\_{1}−a=0$，$x\_{2}^{3}lnx\_{2}−a=0$，
则$lnx\_{1}=\frac{a}{x\_{1}^{3}}$，$lnx\_{2}=\frac{a}{x\_{2}^{3}}$，
所以$a=\frac{ln x\_{2}−ln x\_{1}}{\frac{1}{x\_{2}^{3}}−\frac{1}{x\_{1}^{3}}}$，
要证$a(\frac{2}{x\_{1}^{3}}+\frac{1}{x\_{2}^{3}})<−1$，
只需证$(\frac{2}{x\_{1}^{3}}+\frac{1}{x\_{2}^{3}})\frac{lnx\_{2}−lnx\_{1}}{\frac{1}{x\_{2}^{3}}−\frac{1}{x\_{1}^{3}}}<−1$，
即证$ln\frac{x\_{2}}{x\_{1}}+\frac{\frac{1}{x\_{2}^{3}}−\frac{1}{x\_{1}^{3}}}{\frac{2}{x\_{1}^{3}}+\frac{1}{x\_{2}^{3}}}>0$，
即证$ln\frac{x\_{2}}{x\_{1}}+\frac{1−(\frac{x\_{2}}{x\_{1}})^{3}}{2(\frac{x\_{2}}{x\_{1}})^{3}+1}>0$，
令$m=\frac{x\_{2}}{x\_{1}}(m>1)$，则只需证$lnm+\frac{1−m^{3}}{2m^{3}+1}>0$，
设$g(m)=lnm+\frac{1−m^{3}}{2m^{3}+1}(m>1)$，
则$g′(m)=\frac{1}{m}−\frac{9m^{2}}{(2m^{3}+1)^{2}}=\frac{4m^{6}−5m^{3}+1}{m(2m^{3}+1)^{2}}$
$=\frac{(4m^{3}−1)(m^{3}−1)}{m(2m^{3}+1)^{2}}>0$，
所以$g(m)$在$(1,+\infty )$上单调递增，
则$g(m)>g(1)=0$，所以$lnm+\frac{1−m^{3}}{2m^{3}+1}>0$成立，
故$a(\frac{2}{x\_{1}^{3}}+\frac{1}{x\_{2}^{3}})<−1$．