

数学试题答案

一、选择题： 1-5 BCCBA 6-8 BDD

二、选择题： 9.AC 10.ACD 11.BCD

三、填空题： 12.1 13. $-\frac{3}{4}$ 14. 682

四、解答题：

15. 解：(1) 由题意得 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$, $S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$,

$$\text{则 } S_1 - S_2 - S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}bc,$$

所以 $a^2 - b^2 - c^2 = bc$,2 分

由余弦定理可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$,4 分

又 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$;6 分

(2) 设 $\angle ACB = \alpha$ (α 为锐角), 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中,

由正弦定理可得 $\frac{BD}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{AD}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}$,8 分

$$\frac{CD}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{AD}{\sin(\pi - \alpha)}, \text{10 分}$$

$$\text{于是 } \frac{BD \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\sin\frac{5\pi}{6}} = \frac{CD \cdot \sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{6}}, \text{ 又 } BD = 4CD, \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以 } \frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha} = 4, \text{ 化简得 } \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha. \text{11 分}$$

根据同角三角函数基本关系可得: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,

$$\text{解得 } \sin\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \text{ 负值舍去.}$$

$$\text{所以 } \sin\angle ACB = \frac{2\sqrt{7}}{7} \text{13 分}$$

16. 解：(1) 作 $BH \perp PE$ 交 PE 于 H ,

因为平面 $PAE \perp$ 平面 PBE , 且平面 $PAE \cap$ 平面 $PBE = PE$, $BH \subset$ 面 PBE ,

所以 $BH \perp$ 平面 PAE , 又因为 $AE \subset$ 平面 PAE , 所以 $BH \perp AE$,3 分

因为 $PB \perp$ 平面 ABC , 且 $AE \subset$ 平面 ABC , 所以 $PB \perp AE$,

因为 $BH \perp AE$, $PB \perp AE$, PB 、 $BH \subset$ 平面 PBE , $PB \cap BH = B$,

所以 $AE \perp$ 平面 PBE , 又因为 $BE \subset$ 平面 PBE , 所以 $AE \perp BE$6 分

(2) 分别以直线 BA, BC, BP 为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系, 如图, 则 $B(0,0,0)$, $P(0,0,1)$, $C(0,1,0)$, $A(1,0,0)$,7 分

设 $E(x,y,0)$, 因为 $AE \perp BE$, 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$,

又 $\overrightarrow{AE} = (x-1, y, 0)$, $\overrightarrow{BE} = (x, y, 0)$,

所以 $(x-1) \cdot x + y \cdot y = 0$, 即 $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$,8 分

$\overrightarrow{PA} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{AE} = (x-1, y, 0)$,

设平面 PAE 的一个法向量为 $\vec{n} = (a, b, c)$,

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a - c = 0 \\ a(x-1) + by = 0 \end{cases}$, 令 $a = y$ 得 $\vec{n} = (y, 1-x, y)$10 分

$\overrightarrow{BC} = (0, 1, 0)$ 为平面 PAB 的一个法向量,11 分

令二面角 $E-PA-B$ 为角 θ ,

$\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{|x-1|}{\sqrt{(x-1)^2 + 2y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 又 $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$,

解得 $x=1, y=0$ (舍去) 或 $x=\frac{1}{2}, y=\pm\frac{1}{2}$.

则 $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 或 $E(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$,14 分

从而可得三棱锥 $E-PCB$ 的体积 $V_{E-PCB} = \frac{1}{3} S_{\triangle PCB} \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$15 分

17. 解: (1) 依题意, 随机变量 X 服从超几何分布, $X=0, 1, 2, 3$

$P(X=0) = \frac{C_3^0 \cdot C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$, $P(X=1) = \frac{C_3^1 \cdot C_4^2}{C_7^3} = \frac{18}{35}$,

$P(X=2) = \frac{C_3^2 \cdot C_4^1}{C_7^3} = \frac{12}{35}$, $P(X=3) = \frac{C_3^3 \cdot C_4^0}{C_7^3} = \frac{1}{35}$,4 分

由此可得 $P(X=1) = \frac{18}{35}$ 最大,

即 $X=1$ 的可能性最大, 故 X 最有可能的取值为 1.5 分

(2) (i) 依题意, $y = \lambda \cdot e^{cx}$ 两边取对数, 得 $\ln y = cx + \ln \lambda$,6 分

即 $z = cx + \ln \lambda$, 其中 $\bar{x} = 63$,7 分

由提供的参考数据, 可知 $c = 0.02$, 又 $-0.642 = 0.02 \times 63 + \ln \lambda$, 故 $\ln \lambda \approx -1.9$.

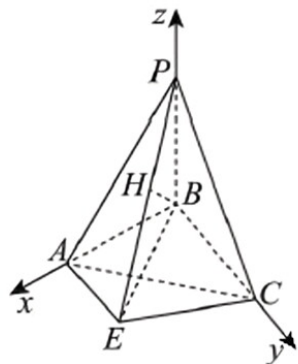
由提供的参考数据, 可得 $\lambda \approx 0.15$,9 分

故 $\hat{y} = 0.15 \cdot e^{0.02x}$, 当 $x=60$ 时, $\hat{y} \approx 0.498$10 分

(ii) 由 (i) 及提供的参考数据可知, $\mu \approx \bar{x} = 63$, $\sigma \approx s \approx 20$.

$y \geq 0.78$, 即 $0.15 \cdot e^{0.02x} \geq 0.78$, 可得 $0.02x \geq \ln 5.2$, 即 $x \geq 83$12 分

又 $\mu + \sigma = 83$, 且 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$,



由正态分布的性质, 得 $P(x \geq 83) = \frac{1}{2}[1 - P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma)] = 0.1587$,

记“绩效等级优秀率不低于 0.78”为事件 A, 则 $P(A) = P(x \geq 83) = 0.1587$,

所以绩效等级优秀率不低于 0.78 的概率等于 0.1587.15 分

18. 解: (1) 由题意知: $c = \sqrt{2}$,1 分

过点 F 且垂直于 x 轴的直线为: $x = -c$, 联立方程 $\begin{cases} x = -c \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ a^2 - b^2 = c^2 \end{cases}$ 得:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

又因为 $a^2 - b^2 = 2$, 得: $a = \sqrt{3}$, $b = 1$.

所以所求椭圆方程 C: $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$5 分

(2) 当 l 的斜率存在时, 设 l 的方程为: $y = kx + m$,

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 3y^2 = 3 \end{cases}$ 消去 y 得: $(3k^2 + 1)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 3 = 0$,7 分

由直线 l 与椭圆 Γ 相切, 得 $\Delta = (6km)^2 - 4(3k^2 + 1)(3m^2 - 3) = 0$,

整理得 $m^2 = 3k^2 + 1$,8 分

于是圆心 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{\frac{3k^2 + 1}{k^2 + 1}} = \sqrt{3 - \frac{2}{k^2 + 1}} \in [1, \sqrt{3})$9 分

设点 P 到直线 l 的距离为 h, 则有 $h \leq OP + d = 3 + d$,

所以 $\triangle PAB$ 的面积为

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} h \cdot |AB| \leq \frac{1}{2} (d+3) \cdot |AB| = \frac{1}{2} (d+3) \cdot 2\sqrt{9-d^2} = \sqrt{(3-d)(d+3)^3}, \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

设 $f(d) = (3-d)(d+3)^3$, $1 \leq d < \sqrt{3}$, 求导得 $f'(d) = 2(d+3)^2(3-2d)$,

当 $1 \leq d < \frac{3}{2}$ 时, $f'(d) > 0$, 函数 $f(d)$ 单调递增, 当 $\frac{3}{2} < d < \sqrt{3}$ 时, $f'(d) < 0$, 函数 $f(d)$ 单调递减, 因此当 $d = \frac{3}{2}$ 时,

$f(d)$ 取得最大值, 此时 $(S_{\triangle PAB})_{\max} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$,13 分

当 l 的斜率不存在时, $|AB| = 2\sqrt{9-3} = 2\sqrt{6}$, $d = \sqrt{3}$, $S \leq \frac{1}{2} \times (\sqrt{3}+3) \times 2\sqrt{6} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$,

由 $(\frac{9\sqrt{3}}{4})^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = \frac{115}{16} - 4\sqrt{3} > 7 - 4\sqrt{3} > 0$, 得 $\frac{27\sqrt{3}}{4} > 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$,15 分

综上, 当 $d = \frac{3}{2}$ 时, $(S_{\triangle PAB})_{\max} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$.

$$\text{又 } d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{\sqrt{3k^2+1}}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{3}{2} \text{ 得: } k = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}, \text{ 所以直线 } l \text{ 的斜率为 } \pm \frac{\sqrt{15}}{3}. \quad \dots 17 \text{ 分}$$

19.解: (1) $g(x) = x\cos x - \sin x$, $g'(x) = -x\sin x$,1 分

当 $x \in (0, \pi]$ 时, $\because \sin x > 0, g'(x) < 0, g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减,

$g(x) < g(0) = 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上无零点.2 分

当 $x \in (\pi, 2\pi]$ 时, $\because \sin x < 0, g'(x) > 0, g(x)$ 在 $(\pi, 2\pi)$ 上单调递增,

$g(\pi) = -\pi < 0, g(2\pi) = 2\pi > 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(\pi, 2\pi)$ 上有唯一零点.3 分

当 $x \in (2\pi, 3\pi]$ 时, $\because \sin x > 0, g'(x) < 0, g(x)$ 在 $(2\pi, 3\pi)$ 上单调递减,

$\because g(2\pi) > 0, g(3\pi) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(2\pi, 3\pi)$ 上有唯一零点,4 分

综上, 函数 $g(x)$ 在区间 $(0, 3\pi)$ 上有两个零点.5 分

$$(2) F(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sin x}{x}, F'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2},$$

由 (1) 知 $F(x)$ 在 $x \in (0, \pi]$ 无极值点, 在 $x \in (\pi, 2\pi]$ 有极小值点, 记为 x_1 ,

在 $x \in (2\pi, 3\pi]$ 有极大值点, 即为 x_2 ,

同理可得, 在 $(3\pi, 4\pi]$ 有极小值点 x_3 , ..., 在 $(n\pi, (n+1)\pi]$ 有极值点 $x_n (n \in \mathbf{N}^*)$,

由 $x_n \cos x_n - \sin x_n = 0$ 得 $x_n = \tan x_n$,

$$\because g(\pi) < 0, g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 > 0, \therefore x_1 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \therefore M(1) = F(x_1) < 0$$

$$\because g(2\pi) > 0, g\left(\frac{5\pi}{2}\right) < 0,$$

$$\text{所以 } x_2 \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right), x_2, x_1 + \pi \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right) \dots \dots \dots 8 \text{ 分}$$

$$\because x_2 > x_1, \therefore \tan x_2 > \tan x_1 = \tan(x_1 + \pi),$$

由函数 $y = \tan x$ 在 $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ 单调递增得: $x_2 > x_1 + \pi$,

$$\therefore F(x_1) + F(x_2) = \frac{\sin x_1}{x_1} + \frac{\sin x_2}{x_2} = \cos x_1 + \cos x_2,$$

由 $y = \cos x$ 在 $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ 单调递减得: $\cos x_2 < \cos(x_1 + \pi) = -\cos x_1$,

$$\therefore F(x_1) + F(x_2) < 0, \dots \dots \dots 11 \text{ 分}$$

同理 $x_{2n-1} \in ((2n-1)\pi, 2n\pi - \frac{\pi}{2}), x_{2n} \in (2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}), 2n\pi + \frac{\pi}{2} > x_{2n} > x_{2n-1} + \pi > 2n\pi$,

由 $y = \cos x$ 在 $\left(2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) (n \in \mathbf{N}^*)$ 上单调递减得: $\cos x_{2n} < -\cos x_{2n-1}$,

$$F(x_{2n}) + F(x_{2n-1}) = \cos x_{2n} + \cos x_{2n-1} < 0 \text{ 且 } F(x_{2n}) > 0, F(x_{2n-1}) < 0, \dots \dots \dots 13 \text{ 分}$$

当 n 为偶数时,

$$\text{即 } M(n) = [F(x_1) + F(x_2)] + [F(x_3) + F(x_4)] + \dots + [F(x_{n-1}) + F(x_n)] < 0; \dots 15 \text{ 分}$$

当 n 为奇数时, 即 $M(n) = [F(x_1) + F(x_2)] + [F(x_3) + F(x_4)] + \dots + [F(x_{n-2}) + F(x_{n-1})] + F(x_n) < 0$,

综上, 对一切 $n \in \mathbf{N}^*, M(n) < 0$ 成立.17 分