

2024 年普通高等学校招生全国统一考试模拟试题（一）

数 学

本试卷共 4 页，19 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 i 为虚数单位，若复数 z 满足 $z(1+i)=2$ ，则 $|z-i|=(\quad)$
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2
2. 已知集合 $A=\{\text{太平洋, 大西洋}\}$ ，集合 $B=\{x|x\subseteq A\}$ ，则集合 A 与集合 B 的关系为 (\quad)
A. $A\in B$ B. $A\subseteq B$ C. $A\supseteq B$ D. $A=B$
3. 一个容量为 10 的样本，6,7,8,9,10,13,14,15,17,18，则该组数据的上四分位数为 (\quad)
A. 8 B. 7.5 C. 14.5 D. 15
4. 已知直线 $l:ax+y-2=0$ 与 $\odot C:(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 交于 $A、B$ 两点， $\angle BCA=\frac{\pi}{2}$ ，则 $a=(\quad)$
A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. -1 D. $-\frac{1}{2}$
5. 考虑以 Ω 为样本空间的古典概型。设 X 和 Y 定义在 Ω 上，取值于 $\{0,1\}$ 的成对分类变量，则“ $\{X=0\}$ 与 $\{Y=0\}$ 独立”是“ $\{X=1\}$ 与 $\{Y=1\}$ 独立”的 (\quad)
A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
6. $a>0, b>0$ ， $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$ ，则 $\frac{1}{a-1}+\frac{3}{b-2}$ 的最小值为 (\quad)
A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{6}$ D. 6



7. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 通项公式为 $a_n = 2n - 1$, $b_n = 3n - 2$, 将数列 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{c_n\}$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_n =$ ()

A. $3n^2$ B. $3n^2 - n$ C. $2n^2 - 2n$ D. $3n^2 - 2n$

8. 一个半径为 1 的小球在一个内壁棱长为 $4\sqrt{6}$ 的正四面体封闭容器内可向各个方向自由运动, 则该小球表面永远不可能接触到的容器内壁的面积是 ()

A. $36\sqrt{3}$ B. $18\sqrt{3}$ C. $72\sqrt{3}$ D. $144\sqrt{3}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 四个实数 $1, -4, a, b$ 按照一定的顺序构成一个等比数列, 则 ab 的可能取值有 ()

A. $-\frac{1}{64}$ B. -4 C. 128 D. -1024

10. 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$, $x_1, x_2 \in (m, n)$ 且满足 $f(x_1) = f(n)$, $f(x_2) = f(m)$, 对任意的 $x \in [m, n]$ 恒有 $f(m) \leq f(x) \leq f(n)$, 且 x_0 为 $y = f'(x_0)$ 的极值点, 则下列等式成立的是 ()

A. $x_1 + x_2 = 2x_0$ B. $2(x_2 - x_1) = n - m$ C. $3x_1 = 2x_2 + m$ D. $3x_2 - x_1 = 2n$

11. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过点 F_2 的直线与双曲线的右支交于 A, B 两点, 记 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆 O_1 的半径为 r_1 , $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆 O_2 的半径为 r_2 . 若双曲线的离心率 $e = \sqrt{2}$, 则下列说法正确的是 ()

A. 双曲线的渐近线方程: $y = \pm 2x$ B. 以 O_1O_2 为直径的圆与直线 AB 相切

C. $\triangle ABF_1$ 内切圆半径最小值是 $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ D. $r_1 - r_2$ 的范围是 $(-2\sqrt{2}a, 2\sqrt{2}a)$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 函数 $f(x) = \frac{2^x - 3}{2^x + 1}$ 的对称中心为_____.

13. 抛物线 $E: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 直线 AB, CD 过 F 分别交抛物线 E 于点 A, B, C, D , 且直线 AD, BC 交 x 轴于 N, M , 其中 $N(2, 0)$, 则 M 点坐标为_____.

14. 对于任意的实数 φ , 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) - 1 (\omega > 0)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上至少 3 个零点, 至多 4 个零点, 则 ω 的取值范围为_____.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

发展新能源汽车是我国从汽车大国迈向汽车强国的必由之路，是应对气候变化推动绿色发展的战略举措。随着国务院《新能源汽车产业发展规划（2021—2035）》的发布，我国自主品牌汽车越来越具备竞争力。国产某品牌汽车对市场进行调研，统计了该品牌新能源汽车在某城市 2023 年前几个月的销售量（单位：辆），用 y 表示第 x 月份该市汽车的销售量，得到如下统计表格：

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	28	32	37	45	47	52	60

(1) 经研究， x 、 y 满足线性相关关系，求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ (\hat{a} 、 \hat{b} 按四舍五入精确到整数)；

(2) 该市某 4S 店为感谢客户，决定针对该品牌的汽车成交客户开展抽奖活动，设“一等奖”、“二等奖”和“祝您平安”三种奖项，“一等奖”奖励 5 千元；“二等奖”奖励 3 千元；“祝您平安”奖励纪念品一份。在一次抽奖活动中获得“二等奖”的概率为 $\frac{1}{5}$ ，获得一份纪念品的概率为 $\frac{7}{10}$ ，现有甲、乙两个客户参与抽奖活动，假设他们是否中奖相互独立，求此二人所获奖金总额 X (千元) 的分布列及数学期望。

参考数据及公式： $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 146$ ， $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ 。

16. (本小题满分 15 分)

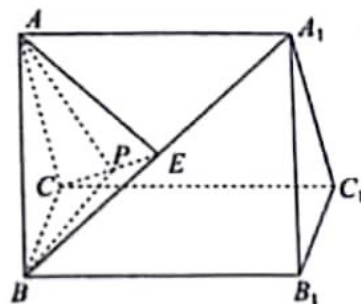
在 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，若 $(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B) = \sin C(\sin B + \sin C)$ 。

(1) 求角 A 的大小；

(2) 若 D 为 BC 上一点，且 AD 为 $\angle A$ 的角平分线， $4b + c = 27$ ，求 AD 的最大值。

17. (本小题满分 15 分)

如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = BB_1 = 2$ ， $BC \perp AB$ 。



(1) 求证： $BC \perp BA_1$ ；

(2) 若 E 为 A_1B 的中点，三棱锥 $A - CE A_1$ 的体积为 1，线段 CE 上是否存在点 P ，使得二面角 $P - AB - E$ 的大小为 45° ，若存在，求 $\frac{EP}{EC}$ 的值，若不存在，请说明理由。



18. (本小题满分 17 分)

已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = k$.

(1) 若 $\alpha \in (0, \pi)$, $k = \frac{1}{3}$, 求 $\tan \alpha$;

(2) 设 $S_n = \sin^n \alpha + \cos^n \alpha$, $n \in \mathbb{N}^*$, 证明: $S_n = kS_{n-1} - \frac{k^2-1}{2}S_{n-2}$ ($n \geq 3$)

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $k = \frac{1}{5}$,

(i) 证明: 数列 $\{S_n - \frac{4}{5}S_{n-1}\}$ 和数列 $\{S_n + \frac{3}{5}S_{n-1}\}$ 均为等比数列;

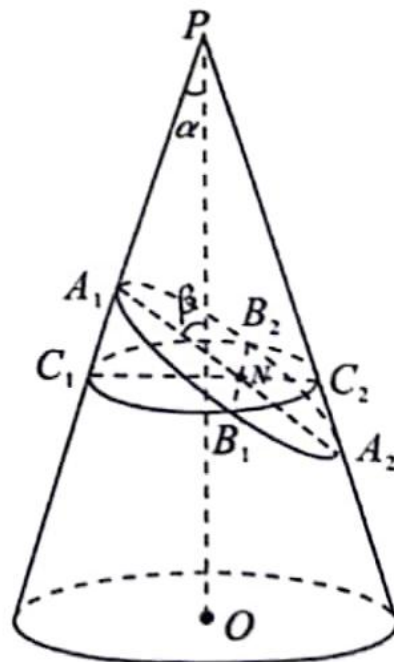
(ii) 求 S_n 的通项公式.

19. (本小题满分 17 分)

如图, 已知圆锥 PO 的轴 PO 与母线所成的角为 α , 过 A_1 的平面与圆锥的轴所成的角为 β , 该平面截这个圆锥所得的截面为椭圆 C , 椭圆 C 的长轴为 A_1A_2 , 短轴为 B_1B_2 , 长半轴长为 3, C 的中心为 N , 再以 B_1B_2 为弦且垂直于 PO 的圆截面, 记该圆与直线 PA_1 交于 C_1 , 与直线 PA_2 交于 C_2 , 设 $\cos \alpha = 3 \cos \beta$.

(1) 求椭圆 C 的焦距;

(2) 椭圆 C 左右焦点分别为 F_1, F_2 , C 上不同两点 A, B , 满足 $\overline{F_1A} = \lambda \overline{F_2B}$ ($\lambda > 0$), 设直线 F_1B, F_2A 交于点 Q , $S_{\triangle QAB} = 1$, 求四边形 ABF_2F_1 的面积.



高三数学答案

1. 【答案】C

【解析】由已知得 $|z| = \frac{|2|}{|1+i|} = \sqrt{2}$, 所以 $|\sqrt{2}-i| = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

2. 【答案】A

【解析】 $\because B = \{\emptyset, \{\text{太平洋}\}, \{\text{大西洋}\}, \{\text{太平洋}, \text{大西洋}\}\} \therefore A \in B$

3. 【答案】D

【解析】 $10 \times 0.75 = 7.5$, 从小到大, 第八个数为 15

4. 【答案】C

【解析】圆 C 的圆心为 $C(1,1)$, 半径为 $r=2$, 由于

$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 则 C 到 AB 的距离为 $\frac{2}{\sqrt{2}}$, 则 $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{|a-1|}{\sqrt{a^2+1}}$ 解得 $a=-1$

5. 【答案】A

【解析】“ $\{X=0\}$ 与 $\{Y=0\}$ 独立”, 等价于 X 和 Y 独立, 等价于“ $\{X=1\}$ 与 $\{Y=1\}$ 独立”

6. 【解析】 $\because \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \therefore ab = 2a + b \therefore (a-1)(b-2) = 2 \therefore \frac{1}{a-1} + \frac{3}{b-2} \geq 2\sqrt{\frac{3}{(a-1)(b-2)}} = \sqrt{6}$

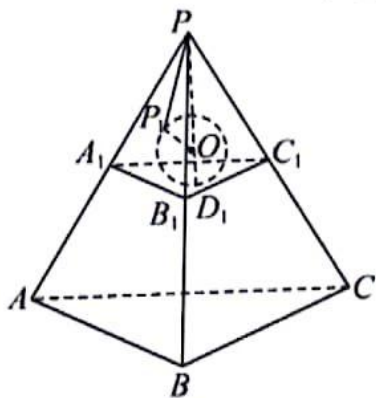
当且仅当 $\frac{1}{a-1} = \frac{3}{b-2}$ 时取等

7. 【答案】D

【解析】 $c_n = 1 + 6(n-1) = 6n - 5$, 所以 $S_n = 3n^2 - 2n$

8. 【答案】C

【解析】试题分析: 如图甲, 考虑小球挤在一个角时的情况, 作平面 $A_1B_1C_1 \parallel$ 平面 ABC , 与小球相切于点 D , 则小球球心 O 为正四面体 $P-A_1B_1C_1$ 的中心, $PO \perp$ 面 $A_1B_1C_1$, 垂足 D 为 $A_1B_1C_1$ 的中心.



图甲

因 $V_{P-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1B_1C_1} \cdot PD = 4 \cdot V_{O-A_1B_1C_1} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A_1B_1C_1} \cdot OD$,

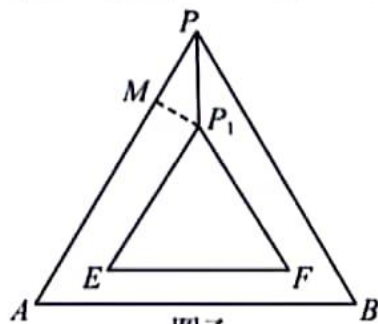
故 $PD = 4OD = 4$, 从而 $PO = PD - OD = 4 - 1 = 3$.

记此时小球与面 PAB 的切点为 P_1 , 连接 OP_1 , 则

$PP_1 = PO^2 - OP_1^2 = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$.



考虑小球与正四面体的一个面(不妨取为 PAB)相切时的情况, 易知小球在面 PAB 上最靠近边的切点的轨迹仍为正三角形, 记为 P_1EF , 如图乙. 记正四面体的棱长为 a , 过 P_1 作 $P_1M \perp PA$ 于 M .



图乙

因 $\angle MPP_1 = \frac{\pi}{6}$, 有 $PM = PP_1 \cdot \cos MPP_1 = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$, 故小三角形的边长 $P_1E = PA - 2PM = a - 2\sqrt{6}$.

小球与面 PAB 不能接触到的部分的面积为

$$S_{\Delta PAB} - S_{\Delta P_1EF} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - (a - 2\sqrt{6})^2) = 3\sqrt{2}a - 6\sqrt{3}.$$

又 $a = 4\sqrt{6}$, 所以 $S_{\Delta PAB} - S_{\Delta P_1EF} = 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

由对称性, 且正四面体共 4 个面, 所以小球不能接触到的容器内壁的面积共为 $72\sqrt{3}$.

9. 【答案】ABD

10. 【答案】ABD

【解析】 $\because f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x \therefore f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$

$\because x_1, x_2 \in (m, n)$ 且满足 $f(x_1) = f(n), f(x_2) = f(m)$, 对任意的 $x \in [m, n]$ 恒有 $f(m) \leq f(x) \leq f(n)$,

$\therefore y = f(n)$ 与 $y = f(x)$ 切于点 $A(x_1, f(x_1))$, 交于点 $D(n, f(n))$

$y = f(m)$ 与 $y = f(x)$ 切于点 $C(x_2, f(x_2))$, 交于点 $B(m, f(m))$

$\therefore x_1, x_2$ 为 $f'(x) = 6(x+1)(x-2) = 0$ 的两异根, $x_1 = -1$ 为 $f(x)$ 极大值点, $x_2 = 2$ 为 $f(x)$ 极小值点,

$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$ 又 x_0 为 $y = f'(x_0)$ 的极值点 $\therefore x_0 = -\frac{b}{3a} \therefore 2x_0 = x_1 + x_2$ 故 A 对

设直线 AD $y = f(n)$, 联立 $\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y = f(n) \end{cases}$, 则 $ax^3 + bx^2 + cx + d - f(n) = 0$, 则

$2x_1 + n = -\frac{b}{a} \therefore 2x_1 + n = 3x_0 \therefore n - x_0 = 2(x_0 - x_1)$ 又 $2x_0 = x_1 + x_2 \therefore x_1, x_0, x_2, n$ 成等差数列, 同理 m, x_1, x_0, x_2 成

等差数列 故 BD 对 选 ABD

11. 【答案】BC

【解析】【详解】因为 $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1} = 1$, 所以渐近线方程为 $y = \pm x$, 所以 A 错

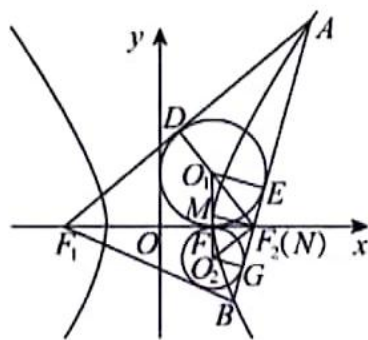
设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 其中 $c^2 = a^2 + b^2$,

设 $O_1(x_{O_1}, y_{O_1}), O_2(x_{O_2}, y_{O_2}), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

对于 C, 过 O_1 分别作 AF_1, AF_2, F_1F_2 的垂线, 垂足分别为 D, E, F ,

由切线长定理有 $|AD| = |AE|, |F_1D| = |F_1F|, |F_2E| = |F_2F|$,

则 $|AF_1| - |AF_2| = |AD| + |DF_1| - |AE| - |EF_2| = |DF_1| - |EF_2| = |F_1F| - |FF_2| = 2a$,



又因为 $|F_1F_2| = |FF_1| + |FF_2| = 2c$ ，所以 $|FF_1| = a + c$ ，

又 $F_1(-c, 0)$ ，所以 $x_{O_1} = a$ ，同理可得 $x_{O_2} = a$ ，则 O_1, O_2 在直线 $x = a$ 上；

对于A，过 O_2 作 AB 的垂线，垂足为 G ，因为 $O_1E \perp AB$ ，则 $O_1E \parallel O_2G$ ，

设 O_2O_1, EG 的中点分别为 M, N ，则 $MN \parallel O_1E$ ，且 $|MN| = \frac{1}{2}(|O_1E| + |O_2G|) = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{1}{2}|O_1O_2|$ ，

所以 $MN \perp AB$ ， M 到 AB 距离为 $\frac{1}{2}|O_1O_2|$ ，

则以 O_1O_2 为直径的圆与直线 AB 相切，故B正确。

对于C，设 $\angle AF_2x = \theta, \theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ ，则 $AB = \frac{2b^2a}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}$ ， $C_{\triangle ABF_1} = 2AB + 4a$ ， $S_{\triangle ABF_1} = \frac{1}{2}F_1F_2 \cdot AB \cdot \sin \theta$ ，

内切圆半径 $r = \frac{2S_{\triangle ABF_1}}{C_{\triangle ABF_1}} = \frac{a}{\sqrt{2} \sin \theta}$ ， $\therefore r_{\min} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ 当且仅当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时取等号 故C对

对于D， $r_1 - r_2 = O_1E - O_2G = \frac{GE}{\tan \theta} = \frac{2FF_2}{\tan \theta} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\tan \theta}a \therefore (2-2\sqrt{2})a < r_1 - r_2 < (2\sqrt{2}-2)a$ 故D错

故选ABC

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. 【答案】(0, -1)

【解析】 $f(x) + f(-x) = \frac{2^x - 3}{2^x + 1} + \frac{2^{-x} - 3}{2^{-x} + 1} = -2$ ，所以对称中心为(0, -1)

13. 【答案】 $(\frac{1}{2}, 0)$

【解析】 F 坐标为(1, 0)，设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4), M(x_0, 0)$ ，设 $l_{AB}: x = ty + m$ ，联立

$\begin{cases} x = ty + m \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 消 x 得 $y^2 - 4ty - 4m = 0$ ，所以 $x_1x_2 = \frac{y_1^2 y_2^2}{4 \cdot 4} = m^2 = 1$ ，同理： $x_3x_4 = 1$ ， $x_1x_4 = 4$ ， $x_2x_3 = x_0^2$ ，所

以 $x_1x_2x_3x_4 = 1$ 所以 $x_0^2 = \frac{1}{4}$ ，所以 $M(\frac{1}{2}, 0)$

14. 【答案】[10, 12)

【解析】令 $f(x) = 0$ ，则 $\sin(\omega x + \varphi) = \frac{1}{2}$ ，当 $x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 时， $\omega x + \varphi \in [\frac{\pi}{3}\omega + \varphi, \frac{2\pi}{3}\omega + \varphi]$ ，其区间长度 $= \frac{\pi}{3}\omega$ ，

为保证 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 上至少3零点，至多4零点，则 $\frac{4\pi}{3} + 2\pi \leq \frac{\pi}{3}\omega < 4\pi$ ，解得 $10 \leq \omega < 12$ 故 $\omega \in [10, 12)$

15. 【答案】(1) $\hat{y} = 5x + 22$

(2) 分布列见解析， $E(X) = \frac{11}{5}$

【解析】(1) 解：由题意可得， $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$ ，

$\bar{y} = \frac{28+32+37+45+47+52+60}{7} = 43$ ，



$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{146}{28} \approx 5, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 43 - \frac{146}{28} \times 4 \approx 22,$$

故线性回归方程为 $\hat{y} = 5x + 22$ 6 分

(2) 解: 由题意可得, 获得“一等奖”的概率为 $1 - \frac{1}{5} - \frac{7}{10} = \frac{1}{10}$,

X 的所有可能取值为 0、3、5、6、8、10,

$$P(X=0) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{49}{100}, \quad P(X=3) = \frac{1}{5} \times \frac{7}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{25},$$

$$P(X=5) = \frac{1}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{7}{50}, \quad P(X=6) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25},$$

$$P(X=8) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{25}, \quad P(X=10) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100},$$

故 X 的分布列为:

X	0	3	5	6	8	10
P	$\frac{49}{100}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{49}{100} + 3 \times \frac{7}{25} + 5 \times \frac{7}{50} + 6 \times \frac{1}{25} + 8 \times \frac{1}{25} + 10 \times \frac{1}{100} = \frac{11}{5}.$$

16. 【答案】(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) 3

【解析】(1) 因为 $(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B) = \sin C(\sin B + \sin C)$,

由正弦定理得 $(a+b)(a-b) = c(b+c)$, 即 $a^2 - b^2 = bc + c^2$,

$c^2 + b^2 - a^2 = -bc$, 所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$, 又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$;5 分

(2) 因为 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\pi}{3}$,

因为 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$, 所以 $\frac{1}{2} bc \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} c \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} b \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{3}$,

即 $bc = AD(c+b)$, 所以 $AD = \frac{bc}{c+b}$, 又 $4b+c=27$ 所以 $0 < b < \frac{27}{4} < 9$

所以 $AD = \frac{b(27-4b)}{27-4b+b} = \frac{b(27-4b)}{3(9-b)}$, 设 $t = 9-b$ 则 $t \in (\frac{9}{4}, 9)$ 所以

$$AD = \frac{(9-t)(4t-9)}{3t} = 15 - \frac{1}{3} \left(4t + \frac{81}{t} \right) \leq 15 - \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 9 = 3$$

当且仅当 $4t = \frac{81}{t}$ 时等号成立, 所以 AD 的最大值为 3.15 分

17. 【答案】(1) 略 (2) $\frac{1}{4}$

【解析】(1) 证明: \because 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直棱柱, $\therefore BB_1 \perp$ 平面 ABC , $\therefore BB_1 \perp BC$.

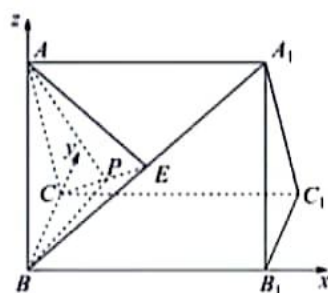


又 $\because BC \perp AB, BB_1 \cap AB = B, BB_1 \subset \text{平面 } ABB_1A_1, AB \subset \text{平面 } ABB_1A_1 \therefore BC \perp \text{平面 } ABB_1A_1$

$\because A_1B \subset \text{平面 } ABB_1A_1$, 所以 $BC \perp A_1B$ 5 分

(2) 解: $\because BC \perp BA, BB_1 \perp \text{平面 } BAC, \therefore BC, BA, BB_1$ 两两垂直,

由 $V_{A-CEA_1} = \frac{1}{2}V_{A_1-ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABC} \times AA_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times BC \right) \times 2 = 1$, 得 $BC = 3$.



于是以 B 为坐标原点, BB_1, BC, BA 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示空间直角坐标系, 易知平面 ABE 的一个法向量为 $\overrightarrow{BC} = (0, 3, 0)$,

设平面 ABP 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

因为 $A(0, 0, 2), B(0, 0, 0), C(0, 3, 0), E(1, 0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{BA} = (0, 0, 2)$,

设 $\frac{EP}{EC} = \lambda (\lambda > 0)$, 则 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BE} + \lambda \overrightarrow{EC} = (1 - \lambda, 3\lambda, 1 - \lambda)$.

由 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BA} = 2z = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BP} = (1 - \lambda)x + 3\lambda y + (1 - \lambda)z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 3\lambda$, 得 $y = \lambda - 1, z = 0$, 所以 $\vec{m} = (3\lambda, \lambda - 1, 0)$,

\because 二面角 $P-AB-E$ 的大小为 45° , 则 $\cos 45^\circ = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \vec{m}|}{|\overrightarrow{BC}| |\vec{m}|} = \frac{|\lambda - 1|}{\sqrt{10\lambda^2 - 2\lambda + 1}}$, $\therefore \lambda = \frac{1}{4}$,

所以存在点 P , 当 $\frac{EP}{EC} = \frac{1}{4}$ 时, 二面角 $P-AB-E$ 的大小为 45° 15 分

18. 【答案】(1) $-\frac{9+\sqrt{17}}{8}$ (2) $S_n = kS_{n-1} - \frac{k^2-1}{2}S_{n-2} (n \geq 3)$ (3) $S_n = (\frac{4}{5})^n + (-\frac{3}{5})^n$

【解析】(1) $\because \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3} \therefore \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}[(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1] = \frac{-4}{9} \therefore \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

$\therefore (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{17}{9} \therefore \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{17}}{3} \therefore \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1+\sqrt{17}}{6} \\ \cos \alpha = \frac{1-\sqrt{17}}{6} \end{cases}$

$\therefore \tan \alpha = \frac{1+\sqrt{17}}{1-\sqrt{17}} = \frac{18+2\sqrt{17}}{-16} = -\frac{9+\sqrt{17}}{8}$ 4 分

(2) $\because S_1 = \sin \alpha + \cos \alpha = k, S_2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 则 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{k^2-1}{2}$

$S_n = \sin^n \alpha + \cos^n \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^{n-1} \alpha + \cos^{n-1} \alpha) - \cos \alpha \sin^{n-1} \alpha - \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha$

$= kS_{n-1} - \frac{k^2-1}{2}S_{n-2} (n \geq 3)$ 7 分



$$(3) (i) \because S_n = \frac{1}{5}S_{n-1} + \frac{12}{25}S_{n-2} \quad \therefore \begin{cases} S_n - \frac{4}{5}S_{n-1} = -\frac{3}{5}(S_{n-1} - \frac{4}{5}S_{n-2}) \\ S_n + \frac{3}{5}S_{n-1} = \frac{4}{5}(S_{n-1} + \frac{3}{5}S_{n-2}) \end{cases}$$

$$\text{又} \because S_1 = \frac{1}{5}, S_2 = 1 \text{ 所以 } S_2 - \frac{4}{5}S_1 = 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{21}{25}, S_2 + \frac{3}{5}S_1 = 1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{28}{25}$$

所以数列 $\{S_n - \frac{4}{5}S_{n-1}\}$ 是以 $-\frac{3}{5}$ 为公比, $\frac{21}{25}$ 为首项的等比数列, 数列 $\{S_n + \frac{3}{5}S_{n-1}\}$ 是以 $\frac{4}{5}$ 为公比, $\frac{28}{25}$ 为首项的等比数列.....12 分

$$(ii) \therefore \begin{cases} S_n - \frac{4}{5}S_{n-1} = (-\frac{3}{5})^{n-2} \frac{21}{25} \\ S_n + \frac{3}{5}S_{n-1} = (\frac{4}{5})^{n-2} \frac{28}{25} \end{cases}$$

$$\text{即 } S_{n-1} = (\frac{4}{5})^{n-2} \frac{4}{5} - (-\frac{3}{5})^{n-2} \frac{3}{5} = (\frac{4}{5})^{n-1} + (-\frac{3}{5})^{n-1} \therefore S_n = (\frac{4}{5})^n + (-\frac{3}{5})^n \text{ 得证}.....17 \text{ 分}$$

$$19. \text{【答案】}(1) 2 \quad (2) \frac{576}{137}$$

【解析】(1) 过 N 作 $NG \perp PC_1$ 于点 G , 而 $\angle C_1 A_1 N = \alpha + \beta, |NA_1| = a$,

$$\text{所以 } |NG| = a \sin(\alpha + \beta), \text{ 而 } \angle C_1 NG = \alpha, \therefore |C_1 N| = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha},$$

$$\text{同理过 } N \text{ 向 } PC_2 \text{ 作垂线, 可得 } |C_2 N| = \frac{a \sin(\beta - \alpha)}{\cos \alpha},$$

$$\therefore b^2 = |NB_1|^2 = |NC_1|^2 + |NC_2|^2 = \frac{a^2 \sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}{\cos^2 \alpha}$$

$$\therefore e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{\sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}{\cos^2 \alpha} = (\frac{\cos \beta}{\cos \alpha})^2 \therefore e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{1}{3} \because a = 3 \therefore c = 1$$

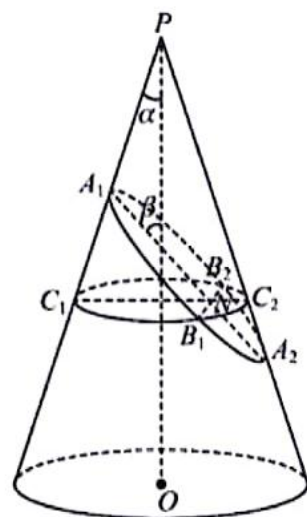
故求椭圆 C 的焦距 $2c = 2$ 6 分

$$(2) \because AF_1 // BF_2 \quad \therefore S_{\triangle QBF_1} = S_{\triangle QF_1F_2} = 1 \quad \therefore S_{\triangle BFF_1F_2} = (1 + \frac{1}{\lambda})S_{\triangle QF_1F_2} = 1 + \frac{1}{\lambda} \quad \therefore S_{\triangle BQF_2} = 1 + \frac{1}{\lambda} - 1 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\therefore S_{\triangle AQF_1} = \lambda^2 S_{\triangle BQF_2} = \lambda \quad \therefore S_{\text{四边形} ABB_1F_2} = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$$

$$\text{延长 } AF_1 \text{ 交 } C \text{ 于 } B_3 \text{ 点, 则 } \overline{AF_1} = \lambda \overline{F_1B_3}, \text{ 设 } A(x_1, y_1), B_3(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} -1 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ 0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \therefore \begin{cases} x_1 + \lambda x_2 = -(1 + \lambda) \\ y_1 + \lambda y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{8} = 1 \\ \frac{x_2^2}{9} + \frac{y_2^2}{8} = 1 \end{cases} \therefore \frac{(x_1 + \lambda x_2)(x_1 - \lambda x_2)}{9} + \frac{(y_1 + \lambda y_2)(y_1 - \lambda y_2)}{8} = 1 - \lambda^2 \quad \therefore \frac{(-1 - \lambda)(x_1 - \lambda x_2)}{9} = 1 - \lambda^2$$



$$\therefore x_1 - \lambda x_2 = 9(\lambda - 1) \therefore \begin{cases} x_1 = 4\lambda - 5 \\ x_2 = -5 + \frac{4}{\lambda} \end{cases} \therefore S_{\triangle AF_1F_2} = \lambda + 1 = c |y_1| = |y_1| \therefore (\lambda + 1)^2 = y_1^2 = 8(1 - \frac{x_1^2}{9}) = 8(1 - \frac{(4\lambda - 5)^2}{9})$$

$$\therefore 137\lambda^2 - 302\lambda + 137 = 0 \therefore \lambda + \frac{1}{\lambda} = \frac{302}{137} \therefore S_{\text{四边形}ABF_1F_2} = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 = \frac{302}{137} + 2 = \frac{576}{137}$$

故四边形 ABF_1F_2 的面积 $\frac{576}{137}$ 17 分

