

高一数学考试参考答案

1. B 因为 $A = \{x | -2x < -3\} = \{x | x > \frac{3}{2}\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} | x^2 - 3x \leq 0\} = \{0, 1, 2, 3\}$, 所以 $A \cap B = \{2, 3\}$.
2. A $z = \frac{4+2i}{3-2i} = \frac{(4+2i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{8+14i}{13} = \frac{8}{13} + \frac{14}{13}i$, 在复平面内对应的点 $(\frac{8}{13}, \frac{14}{13})$ 位于第一象限.
3. C 方向相反且长度相等的两个向量是相反向量.
4. A $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BM}$.
5. D 对于 A, B, C, 只有一个解. 对于 D, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 可得 $\sin B = \frac{5\sqrt{3}}{9} > \sin \frac{\pi}{3}$, 所以 B 有两解.
6. D 因为 $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b = 8$, 所以 $a \cdot b = -\frac{3}{2}$.
 a 在 b 上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|} = -\frac{3}{2}b$.
7. A 设该塔的高度为 h 米, 则 $BC = \frac{AB}{\tan \angle ACB} = \frac{h}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}h$, $BD = \frac{AB}{\tan \angle ADB} = \frac{h}{\tan 45^\circ} = h$. 在 $\triangle BCD$ 中, $BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \cdot CD \cos \angle CDB$, 则 $3h^2 = h^2 + 900 - 2h \times 30 \cos 120^\circ$, 解得 $h = 30$ ($h = -15$ 舍去).
8. D $f(x) = \cos 2x + 2\cos x - a = 2\cos^2 x + 2\cos x - 1 - a = 2(\cos x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2} - a$, 令 $f(x) = 0$, 可得 $(\cos x + \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4} + \frac{a}{2}$. 因为 $x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $\cos x \in [0, 1]$, $\cos x + \frac{1}{2} > 0$, 则 $\cos x = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{a}{2}} - \frac{1}{2}$. 要使 $\cos x = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{a}{2}} - \frac{1}{2}$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 内有两个解, 则 $\frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{a}{2}} - \frac{1}{2} < 1$, 解得 $\frac{1}{2} \leq a < 3$.
9. AC 设复数 $z = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$, 由 $z + 1 = |z| - 3i$, 得 $a + bi + 1 = \sqrt{a^2 + b^2} - 3i$, 所以 $\begin{cases} b = -3, \\ a + 1 = \sqrt{a^2 + b^2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b = -3, \\ a = 4, \end{cases}$ 所以 $z = 4 - 3i$, 则 $\bar{z} = 4 + 3i$, $|z| = 5$, $z^2 = 7 - 24i$.
10. AC 因为 $f(-x) = 2^{-x} - 2^x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数. 因为函数 $y = 2^x$ 和 $y = -2^{-x}$ 都是增函数, 所以 $f(x)$ 是增函数. 因为 $x_1 < 0$, $x_1 + x_2 > 0$, 所以 $x_1 > -x_2$, $f(x_1) > f(-x_2)$, 即 $f(x_1) - f(-x_2) > 0$. 因为 $f(x_2) = -f(-x_2)$, 所以 $f(x_1) + f(x_2) > 0$.
11. ACD 由题意得 $a = -e_1 + e_2$, $b = e_1 + e_2$.
 $a - b = -e_1 + e_2 - (e_1 + e_2) = -2e_1$, 所以 $a - b = (-2, 0)$, A 正确.

$|a| = \sqrt{(-e_1 + e_2)^2} = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - 2e_1 \cdot e_2} = 1$, B 错误.

$a \cdot b = (-e_1 + e_2) \cdot (e_1 + e_2) = -e_1^2 + e_2^2 = 0$, 所以 $a \perp b$, C 正确.

$(a-b) \cdot b = -2e_1 \cdot (e_1 + e_2) = -2e_1^2 - 2e_1 \cdot e_2 = -3$, $|a-b| = |-2e_1| = 2$,

$|b| = \sqrt{(e_1 + e_2)^2} = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + 2e_1 \cdot e_2} = \sqrt{3}$,

$\cos \langle a-b, b \rangle = \frac{(a-b) \cdot b}{|a-b| |b|} = \frac{-3}{2 \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\langle a-b, b \rangle = \frac{5\pi}{6}$, D 正确.

12. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 因为 $f(3) = \log_2(3^2 - 5) = 2$, 所以 $f(f(3)) = f(2) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. $\frac{\pi}{3}$ $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{b^2}{2a} = \frac{1}{4}(a + \frac{1}{a}) \geq \frac{1}{2}$, 因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B \leq \frac{\pi}{3}$, 当且仅当 $a=1$ 时, 等号成立.

14. $(0, 6]$ 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2r$, 所以 $AC = 2r \sin \angle ABC = 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC \geq 2AB \cdot BC - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC$, 解得 $AB \cdot BC \leq 12$, 所以 $\vec{AB} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \in (0, 6]$, 即 $\vec{AB} \cdot \vec{CB}$ 的取值范围为 $(0, 6]$.

15. 解: (1) $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 2\cos^2 x$

$= \sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6} - (\cos 2x + 1)$ 2 分

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - 1$ 4 分

$= \sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 1$ 6 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π 8 分

(2) $f(x)$ 的最大值为 0. 10 分

当 $f(x)$ 取得最大值时, $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的最大值为 0, 取得最大值时 x 的取值集合为 $\{x | x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ 13 分

16. 解: (1) 由 $3b \perp (a-b)$ 可得 $3b \cdot (a-b) = 0$, 即 $a \cdot b - b^2 = 0$ 2 分

因为 $a \cdot b = 2 + 3x, b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$,

所以 $2 + 3x - 13 = 0$, 解得 $x = \frac{11}{3}$ 5 分

所以 $a = (1, \frac{11}{3}), a-b = (-1, \frac{2}{3})$,

$|a-b| = \sqrt{1 + (\frac{2}{3})^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ 8 分

(2) $a+c = (-2, x-4)$, 9 分

因为 $b \perp (a+c)$, 所以 $-2 \times 3 - 2(x-4) = 0$, 解得 $x=1$ 11 分

$a=(1,1)$, 又 $3b+c=(3,5)$, 12 分

所以 $\cos \langle 3b+c, a \rangle = \frac{(3b+c) \cdot a}{|3b+c| |a|} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, 14 分

所以 $3b+c$ 与 a 的夹角的余弦值为 $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ 15 分

17. 解: (1) 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(x) = -f(-x)$, 2 分

则 $\ln(x+2) - \ln(ax+2) = -\ln(-x+2) + \ln(-ax+2)$, 3 分

化简得 $\ln(4-x^2) = \ln(4-a^2x^2)$, 即 $4-x^2 = 4-a^2x^2$, 5 分

所以 $a^2=1$, 解得 $a=-1$ 或 $a=1$ (舍去).

故 a 的值为 -1 6 分

(2) $f(x) = \ln(x+2) - \ln(-x+2) = \ln \frac{x+2}{2-x} = \ln(\frac{4}{2-x} - 1)$ 7 分

$f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$ 8 分

因为函数 $y = \frac{4}{2-x} - 1$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递增, 函数 $y = \ln x$ 为增函数, 所以 $f(x)$ 为增函数.

..... 10 分

$f(x) > (\frac{1}{2})^x + m$, 即 $f(x) - (\frac{1}{2})^x > m$ 11 分

令函数 $g(x) = f(x) - (\frac{1}{2})^x, x \in [0, 1]$, 因为函数 $y = -(\frac{1}{2})^x$ 为增函数, 所以 $g(x)$ 也是增函数, 13 分

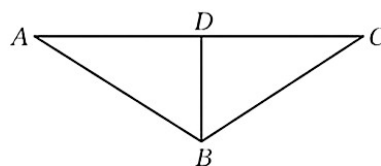
则 $m < g(x)_{\min} = g(0) = -1$.

故 m 的取值范围是 $(-\infty, -1)$ 15 分

18. 解: (1) 假设甲行驶的路线为 AC , 过 B 作 AC 的垂线 BD , 点 B 到 AC 的最短距离为 BD .

要使补给船行驶的路程最短, 补给船需沿正北方向, 即 BD 方向行驶. 2 分

$AD = AB \cos \angle BAD = 120, BD = AB \sin \angle BAD = 90$, 4 分



甲行驶到 D 处所需时间为 $\frac{120}{30} = 4$ 小时. 6 分

补给船行驶的速度为 $\frac{90}{4} = 22.5$ 海里/小时.

故要使得两船同时到达会合点时, 补给船行驶的路程最短, 补给船应沿正北方向, 以 22.5 海里/小时的速度行驶. 8 分

(2) 设补给船以 v 海里/小时的速度从 B 处出发, 沿 BC 方向行驶, t 小时后与甲在 C 处会合.

在 $\triangle ABC$ 中, $AB=150, AC=30t, BC=vt$ 10 分

由余弦定理得 $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC$,

所以 $v^2 t^2 = (30t)^2 + 150^2 - 2 \times 150 \times 30t \times 0.8$, 13 分

$$\text{即 } v^2 = \frac{22500}{t^2} - \frac{7200}{t} + 900 = 22500\left(\frac{1}{t} - \frac{4}{25}\right)^2 + 324. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

当 $\frac{1}{t} = \frac{4}{25}$, 即 $t = \frac{25}{4}$ 时, v^2 取得最小值 324, 即 $v_{\min} = 18$,

所以补给船至少以 18 海里/小时的速度行驶才能追上甲. 当补给船以最小速度行驶时, 要 6.25 小时追上甲. $\dots\dots\dots 17 \text{ 分}$

19. 解: (1) 由 $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}\sin A}{\cos B}$, 可得 $\sin A \cos B = \sqrt{3} \sin B \sin A$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

因为 $\sin A \neq 0$, 所以 $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{6}$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

由 $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$, 可得 $a^2 = b^2 + bc$, 即 $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{c+b}{2a}$, 所以 $c+b = 2a \cos B$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

由正弦定理可得 $\sin C + \sin B = 2 \sin A \cos B$, 则 $\sin(A+B) + \sin B = 2 \sin A \cos B$,
可得 $\sin B = \sin(A-B)$, $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

则 $B = A-B$ 或 $B+A-B = \pi$ (舍去), 所以 $A = 2B = \frac{\pi}{3}$, $C = \pi - A - B = \frac{\pi}{2}$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 设 $\angle BCN = x \in [0, \frac{\pi}{6}]$, 在 $\triangle BCN$ 中, 由正弦定理得 $\frac{CN}{\sin B} = \frac{BC}{\sin \angle BNC}$,

所以 $CN = \frac{BC \sin B}{\sin \angle BNC} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin(x + \frac{\pi}{6})}$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

在 $\triangle ACM$ 中, 由正弦定理得 $\frac{CM}{\sin A} = \frac{AC}{\sin \angle AMC}$,

所以 $CM = \frac{AC \sin A}{\sin \angle AMC} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin(A + \angle ACM)} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x)} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos x}$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\begin{aligned} \triangle MCN \text{ 的面积 } S &= \frac{1}{2} CM \cdot CN \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cos x} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \sin(x + \frac{\pi}{6})} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{16 \cos x \sin(x + \frac{\pi}{6})} = \frac{3\sqrt{3}}{8 [\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}]}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

因为 $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$, 所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) \in [\frac{1}{2}, 1]$, $\frac{3\sqrt{3}}{8 [\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}]} \in$

$$[\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{8}],$$

故 $\triangle MCN$ 面积的取值范围为 $[\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{8}]$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

(3) 因为 $\cos \beta (\sin^2 \alpha + \cos \alpha) + \sin \alpha \sin \beta (\cos \alpha - 1) = \sin \alpha$,

所以 $\sin^2 \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta = \sin \alpha$,

则 $\sin \alpha \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha$,

即 $\sin \alpha [\sin(\alpha + \beta) - 1] + \cos(\alpha + \beta) = 0$ 14 分

由题意, $\alpha + \beta = \pi - \theta$ 是定值, 所以 $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ 是定值,

所以 $\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) - 1 = 0, \\ \cos(\alpha + \beta) = 0. \end{cases}$ 16 分

因为 α, β 为 $\triangle MCN$ 的内角, 所以 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

故 θ 的值为 $\frac{\pi}{2}$ 17 分