**数学**

**命题人：徐凡训 彭如倩 李玲 吴瑶审 题人：徐凡训**

**注意事项：**

**1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.**

**2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.**

**3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 已知，且，则是的（ ）

A. 充要条件 B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】D

【解析】

【分析】利用不等式的性质、对数运算及充分、必要条件的定义判定即可.

【详解】若，符合，但此时，不满足充分性，

若，符合，但是，不满足必要性.

故选：D

2. 已知集合，，在求时，甲同学因将看成，求得，乙同学因将看成，求得.若甲、乙同学求解过程正确，则（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】确定且，得到，根据交集的概念联立方程解得答案.

【详解】根据题意：且，解得，

即，

由，解得，

故.

故选：A.

3. 已知方程有实根*b*，且，则复数*z*等于（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】将代入方程，整理后得到方程组，求出的值，得到答案.

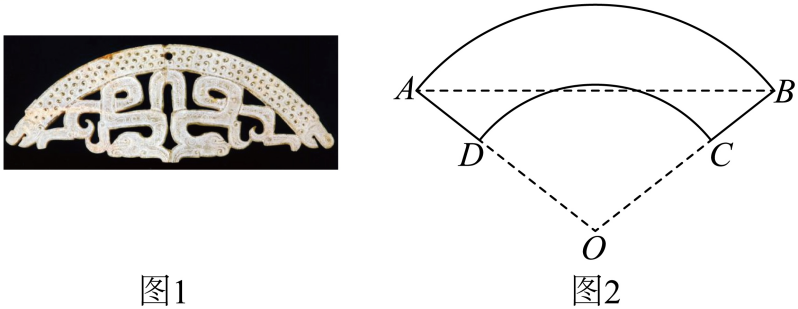
【详解】由*b*是方程）的根可得，

整理可得：，所以，解得，

所以．

故选：A

4. 出土于鲁国故城遗址的“出廓双龙勾玉纹黄玉璜”（图1）的璜身满刻勾云纹，体扁平，呈扇面状，黄身外耧空雕饰“”型双龙，造型精美．现要计算璜身面积（厚度忽略不计），测得各项数据（图2）：，若，则璜身（即曲边四边形）面积近似为（ ）



A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据给定图形求出圆心角，再利用扇形面积公式计算即得.

【详解】显然为等腰三角形，，

则，，又，

所以，于是，

所以璜身的面积近似为.

故选：C

5. 定义为个正数的“均倒数”，若已知数的前项的“均倒数”为，又，则

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】先利用“均倒数”的定义，求得的表达式，代入，利用裂项求和法求得所求的数值.

【详解】根据“均倒数”的定义，有，故，故，，两式相减得，当时，也符合上式，故.所以，注意到，故，故选C.

【点睛】本小题考查新定义概念的理解，考查数列求和方法中的裂项求和法，考查运算求解能力.属于中档题.

6. 设平面向量，若，则平面向量可能是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意利用向量的夹角公式可推出，确定的坐标，求得每个选项中向量的坐标，一一计算验证是否成立，即可求得答案.

【详解】由题意,

因为，所以，

所以，所以，

所以，所以，

由题意，

对于A, 若，

则，故A错误;

对于B，若，

则，故B错误；

对于C，若，

则，故C错误;

对于D，若，

则，故D正确，

故选：D

7. 过点作圆相互垂直的两条弦与，则四边形的面积的最大值为（ ）

A  B.  C.  D. 15

【答案】D

【解析】

【分析】记，由题意可知，易得，再利用基本不等式，得出其最值.

【详解】如图所示：,记,则，

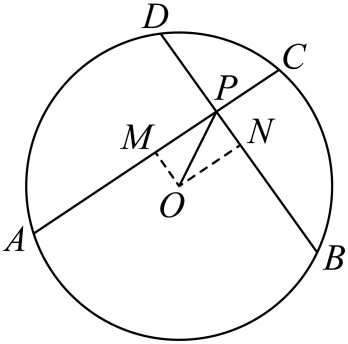
，

，

当且仅当，即时，取等号.

所以四边形的面积的最大值为.

故选：D



8. 若不等式对恒成立，其中，则的取值范围为（ ）

A.  B. 

C.  D. 

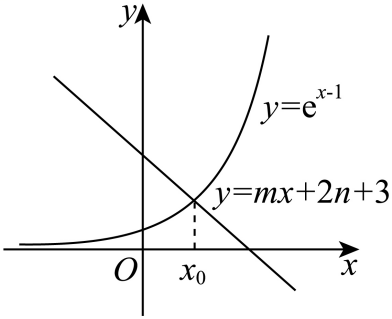
【答案】A

【解析】

【分析】先讨论的范围，当时，利用导数求最值，根据最小值大于等于0可得，然后将二元化一元，令，利用导数求最值可解.

【详解】令，即，

当时，由函数与的图象可知，两函数图象有一个交点，记为，



则当时，，即，不满足题意；

当时，令，则，

令，则，因为单调递增，

所以当时，，单调递减，

当时，，单调递增，

所以时，有最小值，

又对恒成立，

所以，即，

所以，当且仅当时等号成立.

令，则，

当时，，单调递增，

当时，，单调递减，

所以当时，，

所以，即，当且仅当，时等号成立，

所以的取值范围为.

故选：A

【点睛】方法点睛：本题属于恒成立问题，难点在于将恒成立转化为最值问题，以及利用的不等关系将二元化一元，此处应注意保证任何时候都能取到等号.

**二、选择题：本大题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．**

9. 下列说法中，正确的是（ ）

A. 设有一个经验回归方程为，变量增加1个单位时，平均增加2个单位

B. 已知随机变量，若，则

C. 两组样本数据和.若已知且，则

D. 已知一系列样本点的经验回归方程为，若样本点与的残差相等，则

【答案】BC

【解析】

【分析】根据回归方程可判定A，根据正态分布可判定B，根据数据平均数可判定C，根据回归方程及残差的概念可判定D.

【详解】若有一个经验回归方程，随着的增大，会减小，A错误；

曲线关于对称，因为，所以，

所以，B正确；

因为，

所以，

故，C正确；

经验回归方程为，且样本点与的残差相等，

则，所以，D错误.

故选：BC.

10. 设为两个正数，定义的算术平均数为，几何平均数为，则有：，这是我们熟知的基本不等式.上个世纪五十年代，美国数学家*D*.*H*.*Lehmer*提出了“*Lehmer*均值”，即，其中为有理数.下列关系正确的是（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】AC

【解析】

【分析】根据基本不等式比较大小可判断四个选项.

【详解】对于A选项，，

当且仅当时，等号成立，故A正确；

对于B选项，，

当且仅当时，等号成立，故B错误；

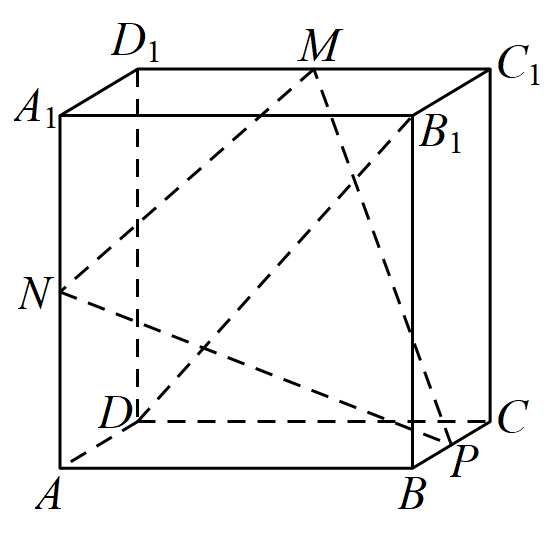
对于C选项，，

当且仅当时，等号成立，故C正确；

对于D选项，当时，由C可知，，故D错误.

故选：AC.

11. 如图，在棱长为2的正方体中，已知*M*，*N*，*P*分别是棱，，的中点，*Q*为平面上的动点，且直线与直线的夹角为，则（ ）



A. 平面

B. 平面截正方体所得的截面面积为

C. 点*Q*的轨迹长度为

D. 能放入由平面*PMN*分割该正方体所成的两个空间几何体内部（厚度忽略不计）的球的半径的最大值为

【答案】ABD

【解析】

【分析】A选项，建立空间直角坐标系，求出平面的法向量，得到线面垂直；B选项，作出辅助线，找到平面截正方体所得的截面，求出面积；C选项，作出辅助线，得到点*Q*的轨迹，并求出轨迹长度；D选项，由对称性得到平面分割该正方体所成的两个空间几何体对称，由对称性可知，球心在上，设球心为，由得到方程，求出半径的最大值.

【详解】A选项，以为坐标原点，所在直线分别为轴，建立空间直角坐标系，

，

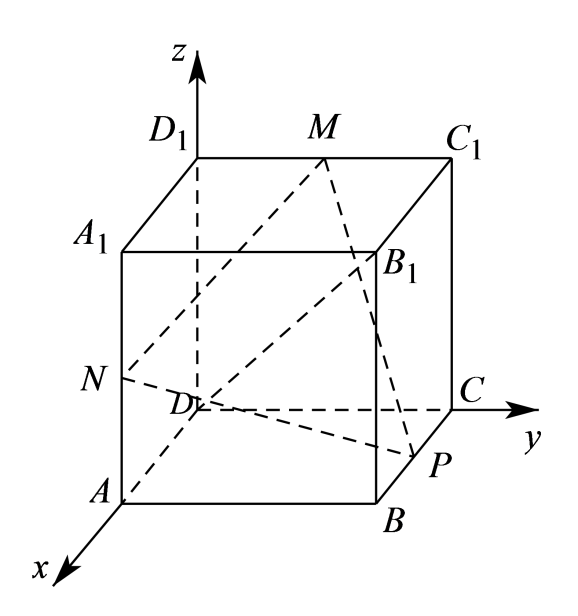
故.

设平面的法向量为，

则，

令得，，故，

因为，故平面，A正确；



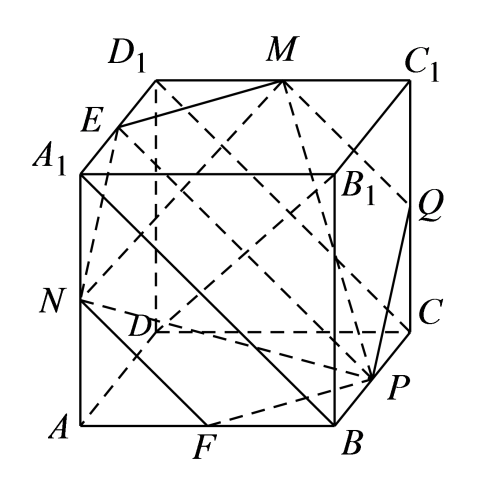
B选项，取的中点，连接，

因为*M*，*N*，*P*分别是棱，，的中点，

所以，又，

所以，所以平面截正方体所得的截面为正六边形，

其中边长为，故面积为，B正确；



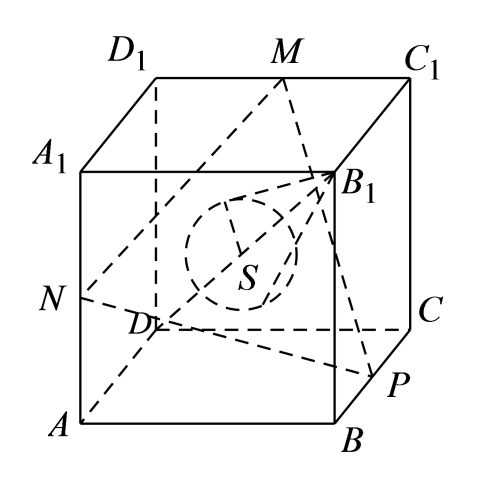
C选项，*Q*为平面上的动点，直线与直线的夹角为，

又平面，设垂足为，以为圆心，为半径作圆，

即为点*Q*的轨迹，

其中，由对称性可知，，

故半径，



故点*Q*的轨迹长度为，C错误；

D选项，因为*M*，*N*，*P*分别是棱，，的中点，

所以平面分割该正方体所成的两个空间几何体对称，

不妨求能放入含有顶点的空间几何体的球的半径最大值，

该球与平面切与点，与平面，平面，平面相切，

由对称性可知，球心在上，设球心为，则半径为，

，故，即，解得，

故球的半径的最大值为，D正确.

故选：ABD

【点睛】立体几何中截面的处理思路：

（1）直接连接法：有两点在几何体的同一个平面上，连接该两点即为几何体与截面的交线，找截面就是找交线的过程；

（2）作平行线法：过直线与直线外一点作截面，若直线所在的平面与点所在的平面平行，可以通过过点找直线的平行线找到几何体与截面的交线；

（3）作延长线找交点法：若直线相交但在立体几何中未体现，可通过作延长线的方法先找到交点，然后借助交点找到截面形成的交线；

（4）辅助平面法：若三个点两两都不在一个侧面或者底面中，则在作截面时需要作一个辅助平面.

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．**

12. 已知为奇函数，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】-6

【解析】

【分析】根据函数为奇函数，得到，从而得到，求出答案.

【详解】因为为奇函数，所以，

即，

所以，故，

即.

故答案为：-6

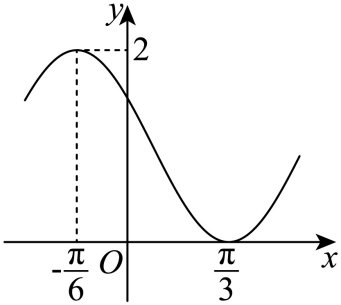
13. 已知函数（其中）的部分图象如图所示，有以下结论：

①

②

③在上单调递增

所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_\_.



【答案】②

【解析】

【分析】借助图象可得解析式，结合正弦函数的单调性、最值、奇偶性等逐项判断即可得.

【详解】由图可得，，且，则，即，

，即，

又，故，即，

对①：，由时，函数取最大值，

故是函数的最大值，故①错误；

对②：，

则，故②正确；

对③：当时，，

由函数在上单调递增，

故函数在上不单调，故③错误.

故正确结论的序号是：②.

故答案为：②.

14. 如果直线和曲线恰有一个交点，那么实数的取值范围是\_\_\_\_\_\_．

【答案】

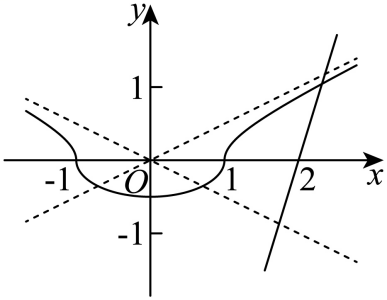
【解析】

【分析】作出曲线的图象，数形结合分析恰有一个交点时实数的取值范围即可.

【详解】由题意，当时，为双曲线的上半部分；

当时，为椭圆的下半部分.

又即，故作出图象：



考虑临界条件，当与椭圆下半部分相切时，有，

整理得，则，

由图象解得.

当与双曲线的渐近线平行时也为临界条件.

故实数的取值范围为.

故答案为：

**四、解答题：本大题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

15. 某商场为了吸引客流，举办了免费答题兑积分活动，获得的积分可抵现金使用．活动规则如下：每人每天只能参加一轮游戏，每轮游戏有三个判断题，顾客都不知道答案，只能随机猜答案．每轮答对题数多于答错题数可得4分，否则得2分，积分可累计使用．

（1）求某顾客每轮游戏得分的分布列和期望；

（2）若某天有10个人参加答题活动，则这10个人的积分之和大于30分的概率是多少?

【答案】（1）分布列见解析，期望为3

（2）

【解析】

【分析】（1）将所有可能的情况列举，再分别求分布列与数学期望即可；

（2）设得4分的人数为，分析可得得4分的至少6人，再根据得4分与得2分的概率相等，可得所求概率为进而可得概率.

【小问1详解】

由题意，所有可能的情况为答对3题、答对2题错1题、答对1题错2题、答错3题，共四种情况，

故得4分的概率为，得2分的概率为.

设某顾客每轮游戏得分为，则可能的取值有2，4，，

故分布列：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 2 | 4 |
|  |  |  |

.

【小问2详解】

设得4分的人数为，则由（1），每人得4分，2分的概率均为，若10人得分之和大于30分，则.

因为得4分与得2分概率相等，故，，，，.

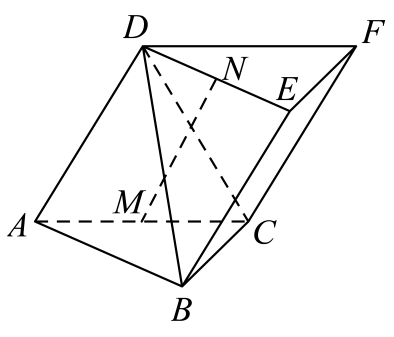
故

.

故这10个人的积分之和大于30分的概率为：

.

16. 如图，在斜三棱柱中，平面平面，，四边形是边长为2的菱形，，，，分别为，的中点.



（1）证明：.

（2）求直线与平面所成角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）

【解析】

【分析】（1）根据题干，先证明平面，从而得到，又因为，再得到平面，进而得到；

（2）在点建立空间直角坐标系，求出直线与平面中各点的坐标，再利用线面夹角公式代入求解即可得到.

【小问1详解】

证明：如图，连接.

因为四边形是边长为2的菱形，，

所以为等边三角形，则.

又平面平面，平面平面，平面，

所以平面，

因为平面，所以.

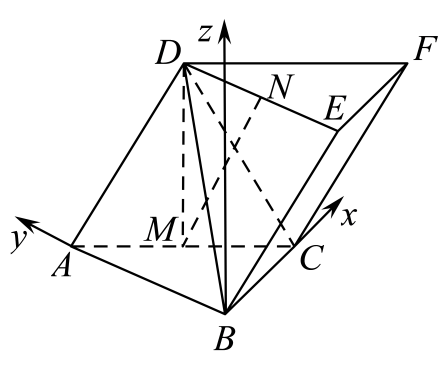
因，，所以.

因为，平面，所以平面.

又平面，所以.

【小问2详解】

如图，过作的平行线为轴，结合（1）知轴，，两两垂直.故可建立如图所示的空间直角坐标系，



则，，，，，

则，，.

设平面的法向量为，

则得

取，得，则.

因为为的中点，所以.

又.所以.

则.

设直线与平面所成的角为，则，

即直线与平面所成角的正弦值为.

17. 已知双曲线的渐近线方程为，的半焦距为，且．

（1）求的标准方程．

（2）若为上的一点，且为圆外一点，过作圆的两条切线（斜率都存在），与交于另一点与交于另一点，证明：

（ⅰ）的斜率之积为定值；

（ⅱ）存在定点，使得关于点对称．

【答案】（1）

（2）（ⅰ）证明见解析；（ⅱ）证明见解析

【解析】

【分析】（1）利用渐近线方程可得，再由焦距为以及即可求得，，可得的标准方程；

（2）（i）设切线方程为，利用直线和圆相切可得，再由韦达定理整理可得的斜率之积为定值，且定值为2；

（ii）联立直线与双曲线方程，可得，同理可求出，化简得，所以，因此关于点对称.

【小问1详解】

因为的渐近线方程为，所以，

则，所以，

因为，所以，得.

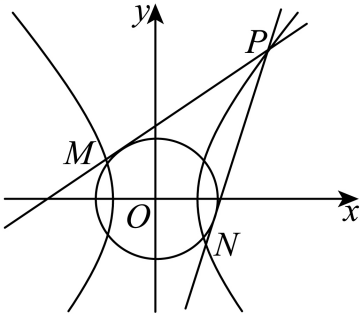
因为，所以，可得，

所以，

故的标准方程为.

【小问2详解】

证明：（i）设，如下图所示：



设过点的切线的斜率为，则切线方程为，

即，所以，

即，

因此的斜率是上式中方程的两根，即.

又因为，所以

所以的斜率之积为定值，且定值为.

（ii）不妨设直线的斜率为，直线的斜率为，

联立，得.

因为，

所以，

则，同理可得，

所以.

因为，所以，所以，

得.

因为都在上，所以或（舍去），

所以存在定点，使得关于点对称.

【点睛】方法点睛：处理圆锥曲线中定点、定值时，经常联立直线和曲线方程利用韦达定理对表达式进行整理化简，便可得出结论.

18. 已知函数．

（1）当时，求函数在处的切线方程；

（2）时；

（ⅰ）若，求的取作范围；

（ⅱ）证明：．

【答案】（1）

（2）

（ⅰ）（ⅱ）证明见解析

【解析】

【分析】（1）令时，利用导数的几何意义求出斜率，进行计算求出切线方程即可.

（2）（ⅰ）设由得，再证明此时满足.

（ⅱ）根据（ⅰ）结论判断出在上单调递增，即

【小问1详解】

当时，

所以切线方程为：即

【小问2详解】

（ⅰ）

即，

设



又是的一个必要条件，即

下证时，满足

又，

设在上单调递减，

所以，

又即在单调递增.

时，；

下面证明时不满足，

，

令，

则，

，

∴在为增函数，

令满足，

则，

又∴,使得，

当时，，

∴此时在为减函数，

当时，，

∴时，不满足恒成立.

综上.

（ⅱ）设

由（ⅰ）知，

在上单调递增，即

【点睛】关键点点睛：本题考查导数，解题关键是进行必要性探路，然后证明充分性，得到所要求的参数范围即可．

19. 已知非零常数，，若对，则称数列为数列．

（1）证明：数列是递增数列，但不是等比数列；

（2）设，若为数列，证明：；

（3）若为数列，证明：，使得．

【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析 （3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）得到，证明出不合题意，符合要求，从而得到，结合得到，得到为递增数列，并得到不是常数，证明出结论；

（2）得到，利用放缩得到，结合证明出结论；

（3）得出，结合累加法得到，得到不等式，求出答案.

【小问1详解】

，

故为公差为的等差数列，所以，

若，则当时，，不合题意，

若，则，满足要求，

，

因为，所以，故，故数列为递增数列，

，由于为递增数列，故不是常数，

不是常数，故数列是递增数列，但不是等比数列；

【小问2详解】

因为为数列，所以，故，

因为，

所以，

因为，

当且仅当时，等号成立，所以；

【小问3详解】

因为为数列，

所以，

所以，

令，则，解得，

所以，使得.

【点睛】思路点睛：数列不等式问题，常常需要进行放缩，放缩后结合等差或等比公式进行求解，又或者放缩后可使用裂项相消法进行求和，常常使用作差法和数学归纳法，技巧性较强.