

齐鲁名校联盟”
2023—2024 学年高三年级第七次联考

数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 A

命题意图 本题考查集合的表示与运算.

解析 由题意可得 $M = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $N = (1, 3)$, 所以 $M \cup N = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

2. 答案 B

命题意图 本题考查复数的运算.

解析 $\because z(1+i)^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$, $\therefore z = \frac{2+2\sqrt{3}i}{(1+i)^2} = \sqrt{3} - i$, $\therefore |z - 2i| = |\sqrt{3} - 3i| = 2\sqrt{3}$.

3. 答案 B

命题意图 本题考查二项式定理、充分与必要条件的判断.

解析 因为 $(2x+a)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 $C_5^2 \times 2^3 \cdot a^2 = 80$, 所以 $a = \pm 1$, 所以“ $(2x+a)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 80”是“ $a=1$ ”的必要不充分条件.

4. 答案 C

命题意图 本题考查指数与对数的应用.

解析 设里氏 6.2 级、4.1 级地震释放的能量分别为 E_2, E_1 , 则 $6.2 - 4.1 = \frac{2}{3}(\lg E_2 - \lg E_1)$, 即 $\lg \frac{E_2}{E_1} = 3.15$.

$\therefore \frac{E_2}{E_1} = 10^{3.15}$, 故里氏 6.2 级地震释放的能量是里氏 4.1 级地震释放的能量的 $10^{3.15}$ 倍.

5. 答案 D

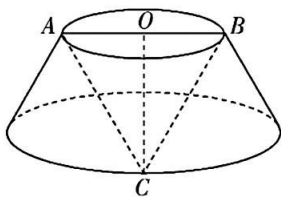
命题意图 本题考查椭圆的性质.

解析 由题意可得 $|OF| = |MF| = |OM| = 1$, 则 $\angle MOF = \angle OFM = 60^\circ$. 记椭圆 C 的左焦点为 F_1 , 因为 $|OM| = |OF_1|$, 所以 $\angle OF_1M = \angle OMF_1 = 30^\circ$, 所以 $\angle F_1MF = 90^\circ$, 所以 $|MF_1| = \sqrt{3}|MF| = \sqrt{3}$, 所以 C 的长轴长为 $2a = |MF_1| + |MF| = \sqrt{3} + 1$.

6. 答案 A

命题意图 本题考查圆台的结构特征.

解析 由已知可得圆台的高为 $\sqrt{4^2 - (5-3)^2} = 2\sqrt{3}$. 如图, 设上底面的圆心为 O , 当 $AC = BC$ 时, 点 C 到直线 AB 的距离最大, 此时 $\triangle ABC$ 的面积最大, $OC = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 5^2} = \sqrt{37}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times OC = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{37} = 3\sqrt{37}$.



7. 答案 B

命题意图 本题考查三角恒等变换的应用.

解析 设 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = m$, 又 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}$, 所以 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{2m+1}{4}$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1-2m}{4}$, 所以 $\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = \frac{2m+1}{1-2m}$, 可得 $\tan \alpha = \frac{2m+1}{1-2m} \tan \beta$, 所以 $\frac{2m+1}{1-2m} = 5$, 解得 $m = \frac{1}{3}$.

8. 答案 D

命题意图 本题考查抛物线与直线的位置关系.

解析 依题意, 抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 $F(0, 1)$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 所以 C 在 $A(x_1, y_1)$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}x_1$, 在 $B(x_2, y_2)$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}x_2$, 所以 C 在 $A(x_1, y_1)$ 处的切线方程为 $y - y_1 = \frac{1}{2}x_1(x - x_1)$, 即 $y = \frac{1}{2}x_1x - y_1$, 同理 C 在 $B(x_2, y_2)$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{2}x_2x - y_2$. 设 $P(4 - 2y_0, y_0)$, 则 $y_0 = \frac{1}{2}x_1(4 - 2y_0) - y_1$, $y_0 = \frac{1}{2}x_2(4 - 2y_0) - y_2$, 可得直线 AB 的方程为 $y_0 = \frac{1}{2}x(4 - 2y_0) - y$, 即 $y_0(x + 1) - 2x + y = 0$, 令 $\begin{cases} x + 1 = 0, \\ -2x + y = 0, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = -2. \end{cases}$ 故直线 AB 过定点 $(-1, -2)$.

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 每小题全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 答案 ABD

命题意图 本题考查抽象函数的性质.

解析 对于 A, 因为 $f(2x + 1)$ 为奇函数, 所以当 $x = 0$ 时, $f(2 \times 0 + 1) = 0$, 即 $f(1) = 0$, 故 A 正确;

对于 B, 由题可知 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 即 $f(2 - x) = -f(x)$, 因为 $f(4 - x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 所以 $f(x + 4) = -f(2 - x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 则 $f(8) = f(0) = 2$, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[6, 8]$ 上单调递增, 故 C 错误;

对于 D, $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上的零点为 1 和 3, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 100]$ 上有 50 个零点, 故 D 正确.

10. 答案 CD

命题意图 本题考查直线与圆的位置关系.

解析 对于 A, 当 AP 与圆 C 相切时, $\angle PAO$ 最大或最小, 此时 $\tan \angle PAC = \frac{1}{\sqrt{7}}$, 又因为 $k_{AC} = -1$, 所以

$$(\tan \angle PAO)_{\max} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{7}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{7}}} = \frac{4 + \sqrt{7}}{3}, \text{ 故 A 错误;}$$

对于 B, 设 $B(x, y)$, 因为 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$, 所以 $P(2x - 2, 2y)$, 又点 P 在圆 C 上, 所以 $(2x - 2)^2 + 4y^2 - 8y + 3 = 0$, 整理得 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$, 故 B 错误;

对于 C, 曲线 D 是圆心为 $D(1,1)$, 半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆, 所以 $1 - \frac{1}{2} < |CD| = \sqrt{2} < 1 + \frac{1}{2}$, 圆 C 与圆 D 相交, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $||AE| - |AF|| \leq (|AC| + 1) - (|AD| - \frac{1}{2}) = |AC| - |AD| + \frac{3}{2} = |CD| + \frac{3}{2} = \sqrt{2} + \frac{3}{2}$, 故 D 正确.

11. 答案 BD

命题意图 本题考查三角函数的图象和性质.

解析 由已知可得 $2 \times \frac{\pi}{8} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

对于 A, 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后, 对应的函数为 $y = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \neq \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 故 A 错误;

对于 B, 令 $f(x) = g(x)$, 即 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 可得 $\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, 则 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 因此方程 $f(x) = g(x)$ 的相邻两个实数根之差的绝对值为 $\frac{\pi}{2}$, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $x \in \left(\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right)$, 所以 $2x + \frac{\pi}{4} \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$, $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$, 因为 $y = \sin x$ 在 $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 根据同增异减原则, 区间 $\left(\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right)$ 为 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 的一个单调递减区间, 故 C 错误;

对于 D, $f(x)$ 的最小正周期为 π , 当 t 与 $t + \frac{\pi}{4}$ 关于 $f(x)$ 的图象的对称中心对称时, $f(x)_{\max} - f(x)_{\min}$ 最大, 最大值为 $\sin \frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 当 t 与 $t + \frac{\pi}{4}$ 关于 $f(x)$ 的图象的对称轴对称时, $f(x)_{\max} - f(x)_{\min}$ 最小, 最小值为 $\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 D 正确.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 答案 $\frac{1}{2}$

命题意图 本题考查等比数列的基本性质.

解析 设公比为 q , 由 $2(a_n + a_{n+2}) = 5a_{n+1}$, 得 $2(1 + q^2) = 5q$, 所以 $q = 2$ 或 $\frac{1}{2}$, 因为 $\{a_n\}$ 是递减数列, $a_1 = 24$, 所以 $q = \frac{1}{2}$.

13. 答案 1

命题意图 本题考查空间向量的运算性质.

解析 $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} - 3\overrightarrow{SB} + 4\overrightarrow{SC} = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC}\right)$, 即 $\frac{1}{2}\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC}$, 因为 $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2 = 1$, 由

空间向量基本定理可知,在平面 ABC 内存在一点 D ,满足 $\overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC}$,所以 $\frac{1}{2}\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SD}$,所以三棱锥 $M-ABC$ 与 $S-ABC$ 的体积之比为 1.

14. 答案 $\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}$

命题意图 本题考查随机变量的分布列.

解析 由题可知 $E(Y) = \frac{1}{3} + 2q$,所以 $D(Y) = \left(\frac{1}{3} + 2q\right)^2 \times \left(\frac{2}{3} - q\right) + \left(\frac{1}{3} + 2q - 1\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} + 2q - 2\right)^2 \times q = -4q^2 + \frac{8}{3}q + \frac{2}{9} = -4\left(q - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$,因为 $0 < q < \frac{2}{3}$,所以当 $q = \frac{1}{3}$ 时, $D(Y)$ 取得最大值 $\frac{2}{3}$. 根据题意可知 $D(X) = 2p(1 - p) = \frac{1}{2}$,得 $p = \frac{1}{2}$,所以 $P(X = 2) = \frac{1}{4}, P(X = 1) = \frac{1}{2}, P(X = 0) = \frac{1}{4}$. 因为 $M = \frac{1}{4} \ln \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{8} = \ln 3 - \frac{3 \ln 2}{2}$,所以 $\frac{M - \ln 3}{\ln 2} = -\frac{3}{2}$.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. **命题意图** 本题考查独立性检验和概率的乘法公式的应用.

解析 (I) 完成 2×2 列联表如下:

	女性	男性	总计
比较了解	22	78	100
不太了解	38	62	100
总计	60	140	200

..... (2 分)

所以 $\chi^2 = \frac{200 \times (62 \times 22 - 78 \times 38)^2}{100 \times 100 \times 60 \times 140} = \frac{128}{21} \approx 6.095$, (4 分)

因为 $6.095 > 3.841$,所以根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验,可以认为车友对越野车的了解程度与性别有关. (6 分)

(II) 分 3 种情况:

①前面两名员工都没有闯过第一关,第三名员工闯过两关,其概率为 $P_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$ (8 分)

②第一名员工闯过第一关,未闯过第二关,第二名员工未闯过第二关,第三名员工闯过第二关,其概率为 $P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{27}$ (10 分)

③第一名员工未闯过第一关,第二名员工闯过第一关,未闯过第二关,第三名员工闯过第二关,其概率为 $P_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{18}$ (12 分)

因此,第三名员工闯关后活动恰好结束的概率为 $P_1 + P_2 + P_3 = \frac{19}{108}$ (13 分)

16. **命题意图** 本题考查线面平行的证明以及利用空间向量计算二面角.

解析 (I) 取 PD 的中点 G ,连接 FG, OG .

因为 F, G 分别为 PC, PD 的中点, 所以 $FG \parallel CD \parallel AB$, (1 分)

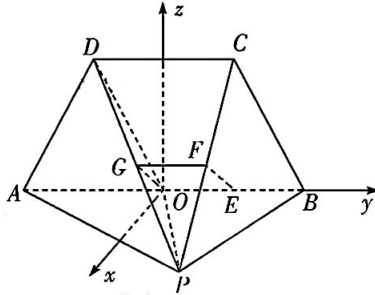
且 $FG = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}$ (2 分)

因为 $\overrightarrow{AE} = 3 \overrightarrow{EB}$, O 为 AB 的中点, 所以 $OE = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}$ (3 分)

所以 $FG \parallel OE$, 且 $FG = OE = \frac{1}{2}$, 所以四边形 $OEFG$ 是平行四边形, 所以 $EF \parallel OG$, (5 分)

又 $EF \not\subset$ 平面 DOP , $OG \subset$ 平面 DOP , 所以 $EF \parallel$ 平面 DOP (7 分)

(II) 如图, 以 O 为坐标原点, AB 所在直线为 y 轴, 平面 ABP 内与 AB 垂直的直线为 x 轴, 平面 $ABCD$ 内与 AB 垂直的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系,



则 $B(0, 1, 0), C(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), D(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), P(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$,

所以 $\overrightarrow{PB} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), \overrightarrow{PC} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{PD} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (9 分)

设平面 BCP 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{PB} \cdot n = 0, \\ \overrightarrow{PC} \cdot n = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \end{cases}$

令 $z = 2$, 得 $n = (2, 2\sqrt{3}, 2)$ (11 分)

设平面 DCP 的法向量为 $m = (p, q, r)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{PD} \cdot m = 0, \\ \overrightarrow{PC} \cdot m = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}p - q + \frac{\sqrt{3}}{2}r = 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}p + \frac{\sqrt{3}}{2}r = 0, \end{cases}$

令 $r = 2$, 得 $m = (2, 0, 2)$ (13 分)

因为 $\cos \langle n, m \rangle = \frac{n \cdot m}{|n| \cdot |m|} = \frac{8}{\sqrt{20} \times \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$,

故平面 DCP 与平面 BCP 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (15 分)

17. 命题意图 本题考查等差数列、递推数列的应用, 数列求和.

解析 (I) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

$\because \{a_n\}$ 是等差数列, $S_6 - S_3 = 27, \therefore a_4 + a_5 + a_6 = 27$,

即 $3a_5 = 27, a_5 = 9$, 又 $a_2 = 3, \therefore d = \frac{a_5 - a_2}{5 - 2} = 2$, (2 分)

$$\therefore a_n = a_2 + (n-2)d = 3 + (n-2) \cdot 2 = 2n - 1. \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \{c_n\} \text{ 的递推关系可得 } c_{2n} = c_{2n-1} - 1, c_{2n+1} = 2c_{2n}, c_{2n+2} = c_{2n+1} - 1, \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\therefore b_n = c_{2n} + c_{2n-1} = 2c_{2n} + 1.$$

$$\therefore b_{n+1} = c_{2n+2} + c_{2n+1} = 4c_{2n} - 1 = 2(2c_{2n} + 1) - 3,$$

$$\therefore b_{n+1} = 2b_n - 3. \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$(II) \text{ 由 } (I) \text{ 可知 } b_{n+1} - 3 = 2(b_n - 3), \text{ 又 } \because b_1 - 3 = c_1 + c_2 - 3 = 2 \neq 0,$$

$$\therefore \text{数列 } \{b_n - 3\} \text{ 是以 } 2 \text{ 为首项, } 2 \text{ 为公比的等比数列, } \therefore b_n - 3 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n, \quad \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\therefore t_n = (2n-1) \times 2^n, \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\therefore Q_n = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n-1) \times 2^n,$$

$$\therefore 2Q_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + \dots + (2n-1) \times 2^{n+1}, \quad \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

$$\text{两式相减, 可得 } -Q_n = 1 \times 2 + 2(2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) - (2n-1) \times 2^{n+1}$$

$$= 2 + \frac{8(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \times 2^{n+1} = 2 + 2^{n+2} - 8 - (2n-1) \times 2^{n+1}$$

$$= (3-2n) \times 2^{n+1} - 6, \quad \dots\dots\dots (14 \text{ 分})$$

$$\therefore Q_n = (2n-3) \times 2^{n+1} + 6. \quad \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$

18. 命题意图 本题考查双曲线与直线的位置关系.

$$\text{解析 } (I) \text{ 设 } D(x_1, y_1), E(x_2, y_2), \text{ 由 } \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = kx + m, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 可得 } (4-k^2)x^2 - 2kmx - m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = (-2km)^2 + 4(4-k^2)(m^2+4) > 0, \text{ 即 } k^2 < m^2 + 4, x_1 + x_2 = \frac{2km}{4-k^2}, x_1 x_2 = -\frac{m^2+4}{4-k^2}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore k_{PD} \cdot k_{PE} = \frac{y_1 y_2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = \frac{(kx_1 + m)(kx_2 + m)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = 1,$$

$$\therefore (kx_1 + m)(kx_2 + m) - (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 0,$$

$$(k^2 - 1)x_1 x_2 + (km + 1)(x_1 + x_2) + m^2 - 1 = 0, \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$(k^2 - 1) \left(-\frac{m^2+4}{4-k^2} \right) + (km + 1) \cdot \frac{2km}{4-k^2} + m^2 - 1 = 0,$$

$$\text{化简得 } -3k^2 + 2km + 5m^2 = 0, \therefore m = \frac{3}{5}k \text{ 或 } m = -k, \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

当 $m = -k$ 时, l 过点 P , 不符合条件.

$$\therefore l \text{ 的方程为 } y = kx + \frac{3}{5}k, \text{ 即 } y = k \left(x + \frac{3}{5} \right), \therefore l \text{ 过定点 } \left(-\frac{3}{5}, 0 \right). \quad \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$(II) \text{ 由 } \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = kx + m, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 可得 } (4-k^2)x^2 - 2kmx - m^2 - 4 = 0 (*),$$

$$\therefore l \text{ 与 } C \text{ 相切, } \therefore k \neq 0, \pm 2, m \neq 0, \text{ 且 } \Delta = 4k^2 m^2 - 4(4-k^2)(-m^2-4) = 0, \therefore k^2 = m^2 + 4. \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\text{由方程 } (*) \text{ 可得 } x_M = -\frac{k}{m}, \therefore y_M = -\frac{k^2}{m} + m = \frac{m^2 - k^2}{m} = -\frac{4}{m}, \therefore M \left(-\frac{k}{m}, -\frac{4}{m} \right),$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的方程为 } y + \frac{4}{m} = -\frac{1}{k} \left(x + \frac{k}{m} \right). \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

令 $y=0$, 得 $x_0 = -\frac{5k}{m}$, 令 $x=0$, 得 $y_0 = -\frac{5}{m}$.

$$\therefore |x_0| - |y_0| = \frac{5(|k| - 1)}{|m|} = \frac{5(\sqrt{m^2 + 4} - 1)}{|m|}. \quad \dots\dots\dots (14 \text{ 分})$$

$$\text{设 } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 1}{x} (x > 0), \text{ 则 } f'(x) = \frac{-4 + \sqrt{x^2 + 4}}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 4}},$$

当 $x \in (0, 2\sqrt{3})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (2\sqrt{3}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故 } |x_0| - |y_0| \text{ 的最小值为 } \frac{5\sqrt{3}}{2}. \quad \dots\dots\dots (17 \text{ 分})$$

19. 命题意图 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 (I) 由 $f'(x) + f(x) = e^{-x}$ 得 $e^x f'(x) + e^x f(x) = 1$, 即 $[e^x f(x)]' = 1$,

$$\text{可设 } e^x f(x) = x + m, \text{ 令 } x=0, \text{ 可得 } m = e^0 f(0) = -1, \text{ 所以 } f(x) = \frac{x-1}{e^x}. \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{求得 } f'(x) = \frac{2-x}{e^x}, \text{ 当 } x < 2 \text{ 时, } f'(x) > 0, \text{ 故 } f(x) \text{ 在 } (-\infty, 2) \text{ 上单调递增.} \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\frac{31}{32}, \cos \frac{1}{4}, 4\sin \frac{1}{4} \text{ 均小于 } 2, \text{ 只需比较这三个数的大小即可,}$$

$$\text{设 } a = \frac{31}{32}, b = \cos \frac{1}{4}, c = 4\sin \frac{1}{4},$$

$$\text{因为当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } x < \tan x, \text{ 所以 } \frac{1}{x} \tan x > 1, \text{ 所以 } \frac{c}{b} = 4 \tan \frac{1}{4} > 1, \text{ 又 } b > 0, \text{ 故 } c > b. \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$\text{设函数 } \varphi(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1, x \in (0, +\infty), \text{ 则 } \varphi'(x) = -\sin x + x > 0, \text{ 所以 } \varphi(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{所以 } \varphi\left(\frac{1}{4}\right) > \varphi(0) = 0, \text{ 即 } \cos \frac{1}{4} - \frac{31}{32} > 0, \text{ 所以 } b > a, \text{ 故 } c > b > a.$$

$$\text{故 } f\left(\frac{31}{32}\right) < f\left(\cos \frac{1}{4}\right) < f\left(4\sin \frac{1}{4}\right). \quad \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$(II) \text{ 由题可知, } g(x) = (x-1)e^{-x} + \cos x.$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } g(0)=0, \text{ 当 } x \in (0, \pi] \text{ 时, } g'(x) = (2-x)e^{-x} - \sin x.$$

$$(i) \text{ 令 } h(x) = (2-x)e^{-x} - \sin x, \text{ 则当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } h'(x) = (x-3)e^{-x} - \cos x < 0,$$

$$\text{所以 } h(x) \text{ 在 } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上单调递减, 因为 } h(0) = 2 > 0, h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}} - 1 < 0,$$

$$\text{所以存在唯一的 } x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 使得 } h(x_0) = 0, \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\text{当 } x \in (0, x_0) \text{ 时, } h(x) = g'(x) > 0, g(x) \text{ 在 } (0, x_0) \text{ 上单调递增, 当 } x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } h(x) = g'(x) < 0, g(x) \text{ 在 } \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调递减.} \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

$$(ii) \text{ 当 } x \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\right] \text{ 时, 令 } s(x) = (2-x)e^{-x}, \text{ 则 } s'(x) = (x-3)e^{-x} < 0, \text{ 故 } s(x) \text{ 在 } \left[\frac{\pi}{2}, 2\right] \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{所以 } s(x) < s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}} < \frac{1}{e}, \text{ 又在 } \left[\frac{\pi}{2}, 2\right] \text{ 上, } \sin x \geq \sin 2 = \sin(\pi - 2) > \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

所以 $g'(x) = (2 - x)e^{-x} - \sin x < 0, g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, 2\right]$ 上单调递减. (14 分)

(iii) 当 $x \in (2, \pi]$ 时, $g'(x) = (2 - x)e^{-x} - \sin x < 0, g(x)$ 在 $(2, \pi]$ 上单调递减. (15 分)

由 (i) (ii) (iii) 可得, $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, \pi]$ 上单调递减,

因为 $g(x_0) > g(0) = 0, g(\pi) = (\pi - 1)e^{-\pi} - 1 < 0$, 所以存在唯一的 $x_1 \in (x_0, \pi)$ 使得 $g(x_1) = 0$.

故 $g(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上仅有两个零点. (17 分)