**河南2024年高考备考精准检测联赛**

**高三数学试题**

 (考试时间：120分钟 试卷满分:150分)

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

**一、选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.)**

1.已知集合 $A=\left\{x|\frac{x−2}{x+3}\right⟩0\},$则 $C\_{R}A=$

 A.$\{x|−3\leq x\leq 2\} $ B$.\{x|−2<x<3\}$

 C.$\{x|x<−2,$或$x>3\} $ D.$\{x|x<−3,$或$x>2\}$

2.设复数z满足 $\frac{2−z}{1+z}=i,$则 $z⋅\overbar{z}=$

 $A.\frac{\sqrt{10}}{2}$ $B.\sqrt{10}$ c. $\frac{5}{2}$ D.5

3.已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足 $ |\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{2},\vec{a}⋅\vec{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}, $则|$\vec{a}$+2$\vec{b}$|=

 $A.\sqrt{9−\sqrt{2}}$ $B.\sqrt{9+\sqrt{2}}$ $C.\sqrt{9+2\sqrt{2}}$ $D.1+2\sqrt{2}$

4.设 $f\left(x\right)=x^{3}+log\_{2}\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right),$则对任意实数$a,b,a+b\leq 0$是$f(a) +f(b)\leq 0$的

 A.充分必要条件 B.充分而不必要条件

 C.必要而不充分条件 D.既不充分也不必要条件

5.已知点 M在曲线 $y²=4x$上，过M作圆 $C:\left(x−3\right)²+y²=1$的切线，切点分别为A，B，则四边形MACB的面积的最小值为

 A.2 $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{7}$ C.3 D.9

6.过三棱柱任意两个顶点的直线中，其中异面直线有( )对

 A.15 B.24 C.36 D.54

7.若 $sin\left(α+β\right)sin\left(α−β\right)=\frac{1}{4},$则cos2α-cos2β=

 A. $\frac{1}{4}$ $B.−\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ $D.−\frac{1}{2}$

8.给出下列四个命题：①垂直于同一直线的两条直线互相平行；②垂直于同一平面的两个平面互相平行；③若直线l₁，l₂与同一平面所成的角相等，则l₁，l₂互相平行；④若直线l₁，l₂是异面直线，则与l₁，l₂都相交的两条直线是异面直线.其中真命题的个数是

 A.0 B.1 C.2 D.3

**二、选择题(本题共4小题，每小题5分，共20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分. )**

9.下列说法正确的是

A.在经验回归方程 $\hat{y}=−0.65x+3.6$中，当解释变量x每增加1个单位时，响应变量y平均减少3.6个单位

B.在经验回归方程 $\hat{y}=−0.65x+3.6$中,相对于样本点(1,2.8)的残差为-0.15

C.在残差图中，残差分布的水平带状区域的宽度越宽，其模型的拟合效果越差

D.若两个变量的决定系数R² 越大，表示残差平方和越小，即模型的拟合效果越好

10.已知等差数列{an}的首项为1，公差为d(d∈N\*)，若61 是该数列中的一项，则公差d可能的值是

 A.4 B.5 C.6 D.7

11.函数$f(x) =sinωx(ω>0)$在区间| $\left[\frac{π}{2}\right]$上为单调函数，且图象关于直线 $x=\frac{2π}{3}$对称，则

A.将函数$f(x)$的图象向左平移⁴π/3个单位长度，所得图象关于原点对称

B.函数$f(x)$在[2π,⁸π/₃]上单调递增

C.若函数$f(x)$在区间( $\left(\frac{14π}{9}\right)$上没有最小值，则实数a的取值范围是( $\left(\frac{14π}{9}\right)$

D.若函数$f(x)$在区间( $\left(\frac{14π}{9}\right)$上有且仅有2个零点，则实数a的取值范围是( $\left(0\right)$

12.函数$f(x)$是定义域为R的非常值函数,且f(2x-1)的图象关于点(1,0)对称,函数y=f(x-1)关于直线x=3 对称，则下列说法正确的是

 A. $f(x)$为奇函数 B.$ f(x+4)=f(x)$

 C.$ f(4+x)=f(−x) $ D. $f(1−x) = −f(x)$

**三、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分.)**

13.已知抛物线 $C:x²=4y$的焦点为F，过P(4，4)作C的准线的垂线，垂足为M，FM 的中点为N，则直线PN的斜率为 .

14. 直三棱柱 $ABC−A₁B₁C₁$的各顶点都在同一球面上，若 $AB=1,AC=AA₁=2,∠BAC=120°,$则此球的表面积等于 .

15.对任意闭区间I,用M, 表示函数 y = cosx 在I上的最大值,若正实数 a 满足 $M\_{\left[a\right]}=$2M[。,2a],则a的值为 .

16.已知双曲线 $:\frac{x^{2}}{a^{2}}−\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\left(a\right⟩0,b>0)$的右焦点为 F，过 F 作直线分别与双曲线的两渐近线相交于A，B 两点，且 $\vec{OA}⋅\vec{AF}=0,\vec{BF}=3\vec{AF},$则该双曲线的离心率为 .

四、解答题(本大题共6 小题，共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.)

17.(本小题满分10分)

在△ABC中,角A,B,C的对边分别为a,b,c, $\vec{BA}⋅\vec{BC}=−\frac{3}{2},cosB=−\frac{1}{4},b=4.$求:

(1)a和c的值;

(2) sin(A-C)的值.

18.(本小题满分12分)

已知数列{an}满足 $a₁=3,aₙ₊₁=3aₙ−2n+1.$

(1)求证: $aₙ−n$为等比数列；

(2)数列 $aₙ−n$的前n项和为Sn，求数列 $\left\{\frac{a\_{n+1}−n−1}{S\_{n}S\_{n+1}}\right\}$的前n项和 Tn.

19.(本小题满分12分)

在四棱锥P-ABCD中,平面 PAD⊥平面ABCD,AB∥DC,AB⊥AD,O为AD中点, $PA=PD=\sqrt{5},AD=AB=2CD=2.$

(1)求证:平面 POB⊥平面 PAC;

(2)求平面 PAB 与平面 PBC 的夹角的余弦值.

20.(本小题满分12分)

某市质监部门根据质量管理考核指标对本地的500 家食品生产企业进行考核，通过随机抽样抽取其中的50家，统计其考核成绩(单位：分)，并制成如下频率分布直方图.



 (1)求这50家食品生产企业考核成绩的平均数x(同一组中的数据用该组区间的中点值为代表)及中位数a(精确到0.01);

(2)该市质监部门打算举办食品生产企业质量交流会，并从这 50 家食品生产企业中随机抽取5 家考核成绩不低于88分的企业发言，记抽到的企业中考核成绩在[96，100]的企业数为 Y，求 Y的分布列与数学期望；

(3)若该市食品生产企业的考核成绩X服从正态分布， $N\left(σ²\right),$其中μ近似为50 家食品生产企业考核成绩的平均数x，σ²近似为样本方差s²，经计算得 $s²=27.68,$，利用该正态分布，估计该市500 家食品生产企业质量管理考核成绩高于95.32分的有多少家?(结果保留整数).

附参考数据与公式： $\sqrt{27.68}≈5.26,X∼N\left(σ^{2}\right),$则 $P\left(μ−σ\leq X\leq μ+σ\right)≈0.6827,$P(μ-2σ≤X≤μ+2σ)≈0.9545,P(μ-3σ≤X≤μ+3σ)≈0.9973.

21.(本小题满分12分)

设函数 $f\left(x\right)=xsinx+cosx−\frac{1}{2}ax^{2}.$

(1)当a=0时,求曲线f(x)在x=π处的切线方程;

(2)当 $a>\frac{1}{3}$时，求证：f(x)有且仅有两个零点.

22.(本小题满分12分)

 已知椭圆 $C:\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\left(a\right⟩b>0)$的右焦点为 F(1，0)，且经过点 $P\left(−\frac{3}{2}\right).$

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)已知直线l的方程x=4，过点 F的直线(不与x轴重合)与椭圆C相交于A，B 两点，过点A 作 AD⊥l,垂足为 D.

①求证：直线BD 过定点 E，并求出定点E 的坐标；

②点 O为坐标原点，求△OBD 面积的最大值.

**高三数学参考答案**

一、选择题(本大题共8小题，每小题5分，共 40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的. )

1. A

【解析】或x<-3}, 则 $C\_{R}A=\left\{x|−3\leq x\leq 2\right\},$ 故选 A.

2. C

【解析】因为 $\frac{2−z}{1+z}=i,$所以 $z=\frac{2−i}{1+i}=\frac{1}{2}−\frac{3}{2}i,\overbar{}z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i,$ 即 $z⋅\overbar{z}=\frac{5}{2},$ 故选 C.

3. C

【解析】因为 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{2},\vec{a}⋅\vec{b}=\frac{\sqrt{2}}{2},$ 所以 $|\vec{a}+2\vec{b}|^{2}=\vec{a}^{2}+4\vec{a}⋅\vec{b}+4\vec{b}^{2}=9+2\sqrt{2},$ $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{9+2\sqrt{2}},$故选 C.

4. A

【解析】因为 $f\left(x\right)=x^{3}+log\_{2}\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$为奇函数，且单调递增. 故选 A.

5. B

【解析】M 到圆心C(3,0)的距离| $MC|=\sqrt{\left(x−3\right)^{2}+y^{2}}=\sqrt{\left(x−3\right)^{2}+4x}=\sqrt{\left(x−1\right)^{2}+8},$则四边形MACB的面积为 $S=2×\frac{1}{2}⋅|MA|⋅1=|MA|=\sqrt{|MC|^{2}−1}\geq \sqrt{7},$ 故选 B.

6. C

【解析】只需找出三棱锥的个数，每个三棱锥中有三对异面直线，以三棱柱的6个顶点为顶点的三棱锥有 12个，所以异面直线有36对，选 C.

7. D

【解析】因为 $sin\left(α+β\right)sin\left(α−β\right)=\frac{1}{4},$所以 $sin^{2}αcos^{2}β−cos^{2}αsin^{2}β=\frac{1}{4},$ $\left(1−cos^{2}α\right)cos^{2}β−cos^{2}α\left(1−cos^{2}β\right)=\frac{1}{4},$ 即 $cos^{2}β−cos^{2}α=\frac{1}{4},$ $\frac{1+cos2β}{2}−\frac{1+cos2α}{2}=\frac{1}{4},cos2α−cos2β=−\frac{1}{2},$ 所以选 D.

8. A

【解析】垂直于同一直线的两条直线可以相交或异面，所以①为假命题； 垂直于同一平面的两个平面可以相交，所以②为假命题； 若直线l₁，l₂与同一平面所成的角相等，则 $l₁,l₂$可相交、平行或异面，所以③为假命题； 若直线l₁，l₂是异面直线，则与( $l₁,l₂$都相交的两条直线可相交，所以④为假命题； 所以选 A.

二、选择题(本题共4小题，每小题5 分，共 20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分. )

9. BCD

【解析】对于A，根据经验回归方程，当解释变量x每增加1个单位时，响应变量y平均减少0.65 个单位，故 A 错误；对于 B，当解释变量x=1时，响应变量 $\hat{y}=2.95,$则样本点(1,2.8)的残差为-0.15，故B 正确；对于C，在残差图中，残差分布的水平带状区域的宽度越宽，说明拟合精度越低，即拟合效果越差，故C正确； 对于D，由决定系数R²的意义可知，R²越大，表示残差平方和越小，即模型的拟合效果越好，故 D正确. 选BCD.

10. ABC

【解析】因为61=1+(n-1)d , 所以 $\left(n−1\right)d=60,d=\frac{60}{n−1},$ 因为n和d都为正整数，所以n=16时, d=4,故选项A正确;当d=5时, n=13,故选项B正确; 当d=6时,n=11, 故 C 正确; 当d=7时, $n=\frac{67}{7},$故选项D错误; 故选 ABC.

11. AB

【解析】由题意 $−\frac{π}{2}\leq −\frac{π}{2}ω,\frac{π}{2}ω\leq \frac{π}{2}$且 $\frac{2π}{3}⋅ω=kπ+\frac{π}{2},k\in Z,$可得 $0<ω\leq 1,ω=\frac{3k}{2}+\frac{3}{4},k\in Z$故当k=0时, $ω=\frac{3}{4},∴f\left(x\right)=sin\frac{3}{4}x.$对A，函数f(x)的图象向左平移 $\frac{4π}{3}$个单位长度可得 $y=sin\frac{3}{4}\left(x+\frac{4π}{3}\right)=sin\left(π+\frac{3}{4}x\right)=−sin\frac{3}{4}x,$ 故函数图象关于原点对称，故 A 正确； 对 B，当 $x\in \left[\frac{8π}{3}\right]$时, $\frac{3}{4}x\in \left[2π\right],$ 所以函数 $f\left(x\right)=sin\frac{3}{4}x$单调递增, 故 B 正确; 对 C, 当 $x\in \left(\frac{14π}{9}\right)$时, $\frac{3}{4}x\in \left(\frac{7π}{6}\right),$函数f(x)在区间 $\left(\frac{14π}{9}\right)$上没有最小值，则需 $−\frac{π}{2}\leq \frac{3a}{4}<\frac{7π}{6},$即 $−\frac{2π}{3}\leq a<\frac{14π}{9},$故 C 错误; 对 D, 由 C, 函数 f(x)在区间 $\left(\frac{14π}{9}\right)$上有且仅有2个零点，则 $−π\leq \frac{3a}{4}<0,$ 即 $−\frac{4π}{3}\leq a<0,$ 故 D 错误.故选 AB.

12. BC

【解析】由函数y=f(x-1)关于直线x=3对称,可得函数f(x)关于直线x=2对称, 故选项C正 确; 由 f(2x-1) 的 图 象 关 于 点 (1,0) 对 称 , 可 得 f(2x-1)+f(2(2-x)-1)=0 , 即f(2x-1)+f(3-2x)=0, 以2x代换x,则f(x-1)+f(3-x)=0,所以函数 f(x)关于点(1,0)对称,可得f(x)+f(2-x)=0,即f(2-x)=-f(x),结合 f(x+2)=f(2-x)可得f(x+2)=-f(x),所以f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x),故选项B 正确.所以f(x)是周期函数，且周期为4，其图象不仅关于直线x=2对称还关于点(1，0)对称，所以不关于点(0，0)和 $\left(0\right)$对称, 所以f(x)不是奇函数, f(x)+f(1-x)≠0, 故选项A, D 错误; 故选 BC.

三、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分)

13. 2

【解析】由题意F(0,1), P在抛物线上,由抛物线定义可得PF=PM,故PN⊥FM.易得M(4,-1), 设直线PN的斜率为k, 则 $\frac{1−\left(−1\right)}{0−4}×k=−1,k=2.$

$$ 14.\frac{40}{3}π$$

【解析】在△ABC中，由余弦定理得 $BC^{2}=1^{2}+2^{2}−2×1×2×\left(−\frac{1}{2}\right)=7,|BC|=\sqrt{7}.$设△ABC的外接圆半径为r，由正弦定理得 $2r=\frac{|BC|}{sin∠BAC}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}},r=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}},$设三棱柱的外接球半径为R，则 $R^{2}=r^{2}+\left(\frac{|AA\_{1}|}{2}\right)^{2}=\frac{10}{3},$所以此球的表面积等于 $\frac{40}{3}π.$

15.π/3或. $\frac{5}{6}π$

【解析】当 $a\in \left[\frac{π}{2}\right]$时, $2a\in \left[π\right],M\_{\left[a\right]}=1,M\_{\left[2a\right]}=cosa,$ 由 $M\_{\left[a\right]}=2M\_{\left[2a\right]},$ 得2cosa=1, 此时 $a=\frac{π}{3};$ 当 $a\in \left[π\right]$时, $2a\in \left[2π\right],M\_{\left[a\right]}=1,M\_{\left[2a\right]}=cos2a,$ 由 $M\_{\left[a\right]}=2M\_{\left[2a\right]},$得2cos2a=1,此时 $a=\frac{5}{6}π;$当 $a\in \left[\frac{3π}{2}\right]$时, $2a\in \left[3π\right],M\_{\left[a\right]}=1,$ $M\_{\left[2a\right]}=1,$由 $M\_{\left[a\right]}=2M\_{\left[2a\right]},$得cosa=2,无解,舍去;当 $a\in \left[+\infty \right)$时,2a∈[3π,+∞), $M\_{\left[a\right]}=1,M\_{\left[2a\right]}=1,$不合题意. 综上，a的值为π/3或 $\frac{5}{6}π.$

16. $\sqrt{3}$

【解析】双曲线的右焦点为F(c，0)，渐近线方程为 $bx\pm ay=0,\vec{OA}⋅\vec{AF}=0,$则有OA⊥AF,F 到渐近线的距离 $AF=\frac{bc}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}=\frac{bc}{c}=b,|OF|=c,|AF|=b,∴|OA|=a,|AB|=2|AF|=2b,$则 $tan∠AOB=\frac{2b}{a},tan∠FOA=\frac{b}{a},tan2∠FOA=\frac{2.\frac{b}{a}}{1−\left(\frac{b}{a}\right)^{2}}$由∠AOB+2∠FOA=π,有tan∠AOB+tan2∠FOB=0, 即 $\frac{2b}{a}+\frac{2.\frac{b}{a}}{1−\left(\frac{b}{a}\right)^{2}}=0,$解得 $\left(\frac{b}{a}\right)^{2}=2,$则有 $\frac{c^{2}}{a^{2}}=\frac{a^{2}+b^{2}}{a^{2}}=3,$所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}.$

四、解答题(本大题共6小题，共 70分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10分)

解: (1)由 $\vec{BA}⋅\vec{BC}=−\frac{3}{2}$ 得 $cacosB=−\frac{3}{2}.$ (2分)

又 $cosB=−\frac{1}{4},$

∴ac=6. (3分)

由余弦定理及b=4得 $a²+c²=13.$

 由 $\left\{\begin{array}{c}a^{2}+c^{2}=13\\ac=6\end{array}\right.$得 $\left\{\begin{array}{c}a=2\\c=3\end{array}\right.,$ 或 $\left\{\begin{array}{c}a=3\\c=2\end{array}\right..$ (5分)

 $\left(2\right)∵cosB=−\frac{1}{4},$

 $∴sinB=\frac{\sqrt{15}}{4}.$ (6分)

当a=2,c=3时, 由正弦定理, 得 $sinA=\frac{a}{b}sinB=\frac{\sqrt{15}}{8},sinC=\frac{c}{b}sinB=\frac{3\sqrt{15}}{16},$

(7分)

 $∴cosA=\frac{7}{8},cosC=\frac{11}{16},$

 $∴sin\left(A−C\right)=sinAcosC−cosAsinC=−\frac{5\sqrt{15}}{64}.$ (8分)

当a=3,c=2时, 由正弦定理, 得 $sinA=\frac{a}{b}sinB=\frac{3\sqrt{15}}{16},sinC=\frac{c}{b}sinB=\frac{\sqrt{15}}{8},$

 $∴cosA=\frac{11}{16},cosC=\frac{7}{8},$ (9分)

 $∴sin\left(A−C\right)=sinAcosC−cosAsinC=\frac{5\sqrt{15}}{64}.$

 $∴sin\left(A−C\right)=\pm \frac{5\sqrt{15}}{64}.$ (10分)

18. (12分)

 $\left(1\right)∵aₙ₊₁=3aₙ−2n+1,$

 $∴aₙ₊₁−\left(n+1\right)=3\left(aₙ−n\right).$ (2分)

又 $a₁=3,$

 $∴a₁−1=2,$ (3分)

∴数列 $aₙ−n$是以2为首项，3为公比的等比数列. (4分)

(2) 由(1)知, $aₙ−n=2⋅3ⁿ⁻¹,aₙ₊₁−n−1=2⋅3ⁿ,$ (6分)

 $S\_{n}=2×\frac{1−3^{n}}{1−3}=3^{n}−1,$ (8分)

 $Sₙ₊₁=3ⁿ⁺¹−1,$

 $\frac{a\_{n+1}−n−1}{S\_{n}S\_{n+1}}=\frac{2×3^{n}}{\left(3^{n}−1\right)\left(3^{n+1}−1\right)}=\frac{\left(3^{n+1}−1\right)−\left(3^{n}−1\right)}{\left(3^{n}−1\right)\left(3^{n+1}−1\right)}=\frac{1}{3^{n}−1}−\frac{1}{3^{n+1}−1},$ (10分)

∴数列 $\left\{\frac{a\_{n+1}−n−1}{S\_{n}S\_{n+1}}\right\}$的前n项和

$T\_{n}=\left(\frac{1}{3−1}−\frac{1}{3^{2}−1}\right)+\left(\frac{1}{3^{2}−1}−\frac{1}{3^{3}−1}\right)+\cdots +\left(\frac{1}{3^{n}−1}−\frac{1}{3^{n+1}−1}\right)=\frac{1}{2}−\frac{1}{3^{n+1}−1}.$ (12分)

19. (12分)

(1) 证明: 由条件可知, $Rt△ADC≅Rt△BAO,$

∴∠DAC=∠ABO,

 $∴∠DAC+∠AOB=∠ABO+∠AOB=90°,$

∴AC⊥BO. (2分)

 $∵PA=PD,$且O为AD中点, ∴PO⊥AD.

∵平面PAD⊥平面ABCD,平面 PAD平面 ABCD=AD, PO⊂平面 PAD, $PO⊥AD,$

 $∴PO⊥平面ABCD.$ (4分)

又∵AC⊂平面ABCD, ∴AC⊥PO.

又∵BO∩PO=O, ∴AC⊥平面POB.

∵AC⊂平面PAC,

∴平面 POB⊥平面 PAC. (6分)

(2)解：以O为空间坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



则P(0, 0, 2), A(1, 0, 0), C(-1, 1, 0), B(1,2,0),

 $\vec{A}=\left(−2\right),\vec{PB}=\left(−2\right),\vec{CB}=\left(0\right)$ 。(8分)

设 $\vec{n\_{1}}=\left(z\right)$为平面PAB的法向量，

由得 $\left\{\begin{array}{c}x−2z=0\\x+2y−2z=0\end{array}\right.,$ 取 $\vec{n\_{1}}=\left(1\right).$ (9分)

同理可设，平面 PBC的法向量 $\vec{n\_{2}}=\left(z^{'}\right),$

由 $\left\{\begin{array}{c}\vec{n\_{2}}\vec{PB}=0\\\frac{\vec{n}}{n\_{2}}\vec{CB}=0\end{array}\right.$得 $\left\{\begin{array}{c}x^{1}+2y^{'}−2z^{'}=0\\2x+y^{'}=0\end{array}\right.,$ 取 $\vec{n\_{2}}=\left(3\right).$ (10分)

∴平面 PAB与平面PBC的夹角的余弦值为 $\frac{|\vec{n\_{1}}⋅\vec{n\_{2}}|}{|\vec{n\_{1}}||\vec{n\_{2}}|}=\frac{1}{\sqrt{145}}=\frac{\sqrt{145}}{145}.$(12分)

20. (12分)

 (1) 这 50家食品生产企业考核成绩的平均数为：

x=74×0.04+78×0.12+82×0.28+86×0.36+90×0.10+94×0.06+98×0.04=84.80 (分),

(2分)

由频率分布直方图得a∈[84, 88]内,

 $∴0.04+0.12+0.28+0.09×\left(a−84\right)=0.5,$

解得中位数a≈84.67 (分) . (4分)

(2) 这50家食品生产企业中考核成绩不低于88分的企业有

50×(0.1+0.06+0.04)=10家,

其中考核成绩在[96, 100]内的企业有50×0.04=2家, (5分)

∴Y 的可能取值为0, 1, 2,

 $P\left(Y=0\right)=\frac{C\_{8}^{5}}{C\_{10}^{5}}=\frac{2}{9},$

 $P\left(Y=1\right)=\frac{C\_{2}^{1}C\_{8}^{4}}{C\_{10}^{5}}=\frac{5}{9},$

 $P\left(Y=2\right)=\frac{C\_{2}^{2}C\_{8}^{3}}{C\_{10}^{5}}=\frac{2}{9},$ (6分)

∴Y的分布列为：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Y | 0 | 1 | 2 |
| P | 2-9 | 5─9 | NIO |

 $E\left(Y\right)=0×\frac{2}{9}+1×\frac{5}{9}+2×\frac{2}{9}=1.$ (8分)

(3) 由题意得X~N(84.80,5.26²), (9分)

∴μ+2σ≈84.80+2×5.26=95.32,

 $∴P\left(X\right⟩μ+2σ)≈\frac{1}{2}−\frac{0.9545}{2}≈0.02275,$ (10分)

∴500×0.02275=11.375≈11 (家) , (11分)

∴估计该市 500家食品生产企业质量管理考核成绩高于 95.32分的有11家. (12分)

21. (12分)

(1) 当a=0时, f(x)=xsinx+cosx,

 $∴f^{'}\left(x\right)=sinx+xcosx−sinx=xcosx,f^{'}\left(π\right)=−π$ (2分)

又f(π)=-1,

∴曲线f(x)在x=π处的切线方程为y+1=-π(x-π),

 即 $y=−πx+π²−1.$ (4分)

(2) f(x)的定义域为(-∞,+∞).

∴f(x)为偶函数, (5分)

 $∴f\left(−x\right)=\left(−x\right)sin\left(−x\right)+cos\left(−x\right)−\frac{1}{2}a\left(−x\right)^{2}=xsinx+cosx−\frac{1}{2}ax^{2}=f\left(x\right)$

∵f(0)=1>0,

∴f(x)有且仅有两个零点等价于f(x)在(0，+∞)有且只有一个零点.

∵f'(x)=x(cosx-a),

当a≥1时, cosx-a≤0, f'(x)≤0恒成立,

∴f(x)在(0,+∞)上单调递减, (7分)

 $∵f\left(π\right)=πsinπ+cosπ−\frac{1}{2}aπ^{2}=−1−\frac{1}{2}aπ^{2}<0,f\left(0\right)=1>0,$

∴f(x)在(0,+∞)上有且只有一个零点. (8分)

当 $\frac{1}{3}<a<1$时, 令f'(x)=x(cosx-a)=0, 即cosx=a,

可知存在唯 $−θ\in \left(\frac{π}{2}\right),$使得cosθ=a,

当x∈(0,θ)或x∈(2kπ+2π-θ,2kπ+2π+θ)时, k∈N,f'(x)>0, 函数f(x)单调递增；

当x∈(2kπ+θ,2kπ+2π-θ)时, k∈N, f'(x)<0, 函数f(x)单调递减.

 由 $tanθ=\sqrt{\frac{1}{a^{2}}−1},\frac{1}{3}<a<1,$ 可得 $0<tanθ<2\sqrt{2},$ (10分)

当k∈N, 2kπ+2π+θ-tanθ>2(π-√₂),

 $∴f\left(2kπ+2π+θ\right)=−\frac{1}{2}a\left[\left(2kπ+2π+θ−tanθ\right)^{2}−1\right]+\frac{1}{2a}<−\frac{1}{6}\left[\left(2kπ+2π+θ−tanθ\right)^{2}−1\right]+\frac{3}{2}$

 $=−\frac{\left(2kπ+2π+θ−tanθ\right)^{2}−10}{6}<0,$

∴f(x)在(0,+∞)上有且只有一个零点. (11分)

综上，当 $a>\frac{1}{3}$时, f(x)有且仅有两个零点. (12分)

22. (12分)

(1) 由题意可得椭圆的左焦点为 F'(-1,0),

 由椭圆定义得 $2a=|PF^{'}|+|PF|=\sqrt{\left(1+1\right)^{2}+\frac{9}{4}}+\sqrt{\left(1−1\right)^{2}+\frac{9}{4}}=4,$ (2分)

 $∴a=2,b²=a²−1=3$

 ∴椭圆C的方程为 $\frac{x^{2}}{4}+\frac{y^{2}}{3}=1.$ (4分)

(2) 由对称性，若直线BD过定点E，则该定点E必在x轴上，

①设直线AB的方程为x=my+1,

 由 $\left\{\begin{array}{c}x=my+1\\\frac{x^{2}}{4}+\frac{y^{2}}{3}=1\end{array}\right.,$ 得 $\left(3m²+4\right)y²+6my−9=0.$ (1) (6分)

设A(x₁,y₁), B(x₂,y₂), D(4,y₁),

$∴y\_{1}+y\_{2}=\frac{−6m}{3m^{2}+4},y\_{1}y\_{2}=\frac{−9}{3m^{2}+4},$ 且 $2my₁y₂=3\left(y₁+y₂\right).$ (8分)

 $∵k\_{BD}=\frac{y\_{2}−y\_{1}}{x\_{2}−4},$

∴直线BD的方程为 $y−y\_{1}=\frac{y\_{2}−y\_{1}}{x\_{2}−4}\left(x−4\right),$

令y=0, 得 $x=4−\frac{y\_{1}\left(x\_{2}−4\right)}{y\_{2}−y\_{1}}=4−\frac{y\_{1}\left(my\_{2}−3\right)}{y\_{2}−y\_{1}}=4−\frac{my\_{1}y\_{2}−3y\_{1}}{y\_{2}−y\_{1}},$ (2)

将 $2my₁y₂=3\left(y₁+y₂\right)$代入(2), 则

 $x=4−\frac{\frac{3}{2}\left(y\_{1}+y\_{2}\right)−3y\_{1}}{y\_{2}−y\_{1}}=4−\frac{3}{2}=\frac{5}{2},$

故直线BD过定点 $\left(0\right),$即定点E为 $\left(0\right).$ (9分)

②在(1) 中, $Δ=36m²+36\left(3m²+4\right)=144\left(m²+1\right),$

 $∴|y\_{1}−y\_{2}|=\sqrt{\left(y\_{1}+y\_{2}\right)^{2}−4y\_{1}y\_{2}}=\sqrt{\frac{36m^{2}}{\left(3m^{2}+4\right)^{2}}+\frac{36}{3m^{2}+4}}=\frac{12\sqrt{m^{2}+1}}{3m^{2}+4}.$

又直线 BD过定点 $E\left(0\right),$

 $∴S\_{△OBD}=S\_{△OED}+S\_{△OEB}=\frac{1}{2}⋅|OE|⋅|y\_{1}−y\_{2}|=\frac{5}{4}.\frac{12\sqrt{m^{2}+1}}{3m^{2}+4}=\frac{15\sqrt{m^{2}+1}}{3m^{2}+4}.$ (10分)

令 $t=\sqrt{m^{2}+1}\geq 1,$则

 $S\_{△OBD}=\frac{15t}{3t^{2}+1}=\frac{15}{3t+\frac{1}{t}}$在t∈[1,+∞)上单调递减,

故当t=1, m=0时, $\left(S\_{△OBD}\right)\_{max}=\frac{15}{4}.$ (12分)