**2024届高三三月联合测评**

**数学试卷**

**本试卷共4页，19题．满分150分．考试用时120分钟．**

**考试时间：2024年3月27日下午15：00—17：00**

**注意事项：**

**1．答题前，先将自已的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置．**

**2．选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效．**

**3．非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内．写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效．**

**4．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交．．**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．设复数，则（ ）

A．0 B．2 C． D．

2．已知集合，，若定义集合运算：，则集合的所有元素之和为（ ）

A．6 B．3 C．2 D．0

3．画条直线，将圆的内部区域最多分割成（ ）

A．部分 B．部分

C．部分 D．部分

4．某运动爱好者最近一周的运动时长数据如下表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 星期 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 日 |
| 时长（分钟） | 60 | 150 | 30 | 60 | 10 | 90 | 120 |

则（ ）

A．运动时长的第30百分位数是30 B．运动时长的平均数为60

C．运动时长的极差为120 D．运动时长的众数为60

5．已知数列中，，，，则下列说法不正确的是（ ）

A． B．

C．是等比数列 D．

6．若，则（ ）

A．88 B．87 C．86 D．85

7．已知函数，，若有两个零点，则（ ）

A． B． C． D．

8．以表示数集中的报小值，已知不全为0的实数*x*，*y*，二元函数，则的最大值为（ ）

A．0 B． C．1 D．2

**二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．**

9．已知函数为函数的一个极值点，则（ ）

A． B．

C． D．

10．已知抛物线，过的焦点的直线与交于*A*，*B*两点，设的中点为，分别过*A*，*B*两点作抛物线的切线，相交于点，则（ ）

A．点必在抛物线的准线上

B．

C．面积的最小值为

D．过作直线的平行线交轴于点，则

11．已知函数，则（ ）

A．当时，方程无解

B．当时，存在实数使得函数有两个零点

C．若恒成立，则

D．若方程有3个不等的实数解，则

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．**

12．已知数列中，，，，则的前项和\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

13．已知直线与椭圆交于*A*，*B*两点，与椭圆交于*C*，*D*两点，若，则实数\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

14．所有顶点都在两个平行平面内的多面体叫作拟柱体．在这两个平行平面内的面叫作拟柱体的底面，其余各面叫作拟柱体的侧面，两底面之间的垂直距离叫作拟柱体的高．现有一拟柱体，上下底面均为正六边形，且下底面边长为4，上底面各顶点在下底面的射影点为下底面各边的中点，高为2，则该拟柱体的体积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**四、解答题：本题共5小题，共77分．解笞应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

15．（13分）

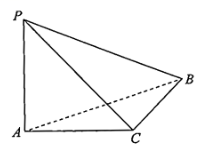
在中，角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，，且．

（1）判断的形状；

（2）若在边上，且，，以和为边，，向外作两个正方形，求这两个正方形面积和的最小值．

16．（15分）

如图，已知三棱锥中，平面底面，平面，且，．



（1）求三棱锥的体积；

（2）已知，求平面与平面所成二面角的正弦值．

17．（15分）

已知函数．

（1）证明：函数有三个不同零点的必要条件是；

（2）由代数基本定理，次复系数多项式方程在复数域内有且只有个根（重根按重数计算）．

若，证明：方程至多有3个实数根．

18．（17分）

在平面直角坐标系内，以原点为圆心，*a*，*b*（，，*a*，*b*为定值）为半径分别作同心圆，，设为圆上任一点（不在轴上），作直线，过点作圆的切线与轴交于点，过圆与轴的交点作圆的切线与直线交于点，过点，分别作轴，轴的垂线交于点．

（1）求动点的轨迹的方程；

（2）设，点，，过点的直线与轨迹交于*A*，*B*两点（两点均在*y*轴左侧）．

（i）若，的内切圆的圆心的纵坐标为，求的值；

（ii）若点是曲线上（轴左侧）的点，过点作直线与曲线在处的切线平行，交于点，证明：的长为定值．

19．（17分）

设的所有可能取值为，称（）为二维离散随机变量的联合分布列，用表格表示为：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y*  *X* |  |  | … |  | … |  |  |
|  |  |  | … |  | … |  |  |
|  |  |  | … |  | … |  |  |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
|  |  |  | … |  | … |  |  |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
|  |  |  | … |  | … |  |  |
|  |  |  | … |  | … |  | 1 |

仿照条件概率的定义，有如下离散随机变量的条件分布列：定义，对于固定的，若，则称为给定条件下的条件分布列．

离散随机变量的条件分布的数学期望（若存在）定义如下：．

（1）设二维离散随机变量的联合分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y*  *X* | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.6 |
| 2 | 0．05 | 0.2 | 0.15 | 0.4 |
|  | 0.15 | 0.5 | 0.35 | 1 |

求给定条件下的条件分布列；

（2）设为二维离散随机变量，且存在，证明：；

（3）某人被困在有三个门的迷宫里，第一个门通向离开迷宫的道，沿此道走30分钟可走出迷宫；第二个门通一条迷道，沿此迷道走50分钟又回到原处；第三个门通一条迷道，沿此迷道走70分钟也回到原处．假定此人总是等可能地在三个门中选择一个，试求他平均要用多少时间才能走出迷宫．

**2024届高三三月联合测评**

**数学试卷参考答案与评分细则**

1．B【解析】因为，所以，选B．

2．A【解析】因为，所以集合的所有元素之和为6，选A．

3．B【解析】设画条直线，将圆最多分割成部分，有，，所以，选B．

4．D【解析】数据排序为：10，30，60，60，90，120，150．由，得第30百分位数为60，A错；平均数为，B错；极差为140，C错；众数为60，D对．选D．

5．D【解析】由，，得，所以，，故，，ABC正确，选D．

6．A【解析】易知，当时，，

所以，

而，所以，选A．

7．C【解析】由，得或，所以或，由，所以，，A、B错误．，C正确，，D错误，选C．

8．C【解析】易知．当时，；当时，，所以，选C．

9．AC【解析】由，，有，，，A正确，B错误；是函数图象的对称轴，C正确；是函数的对称中心，D错误，选AC．

10．ABC【解析】设，与抛物线方程联立有，设，，有，，，的斜率分别为，，有，，解得，所以A正确；，，经计算，，B正确；

对C，，易知当时取最小值，C正确；

对D，由于轴，所以四边形为平行四边形，所以，而，D错误，选ABC．

11．BCD【解析】对A，，，，令，，易知，，，，所以，方程有解，A错误；

对B，有两个零点0，所以当时，有两个零点，正确；

对C，若恒成立，即恒成立，即恒成立，令，则，令，则，所以在是增函数，又，，因此，，使得①，

所以当时，，即，则在上是减函数，

当时，，即，则在上式增函数，

则②，

由①得，又设，易知在是增函数，所以③，将③代入②得，因此，正确．

对D，或，即或两个方程有3个解，令，，可知在上递减，在上递增，且当时，从而，从而，正确．选BCD．

12．，所以，，所以，所以．填：

13．将直线方程分别与两个椭圆方程联立，有，，设，，，，有，，所以线段与的中点重合，故，所以．填：1．

14．过上底顶点向下底作垂线，可得该拟柱体的体积为中间正六棱柱的体积与外侧6个四棱雉的体积之和，上底面边长为，正六棱柱的体积，四棱锥的体积为，从而拟柱体的体积为．填：．

15．（1）由及正弦定理可得，．

整理有．

从而，或．而，所以是直角三角形．

（2）由（1）知，，设，，在中，由正弦定理，，．

同理在中，．

所以两个正方形面积和．

当且仅当，即时等号成立，所以两个正方形面积和的最小值为．

16．（1）取中点为，连结，由，平面，所以．

．

又平面底面，所以平面．

所以．所以底面．

从而的体积为．

（2）由（1）以为原点，过点作平行线为轴，，分别为*x*，*z*轴，建立如图所示的空间直角坐标系．

有，，，．

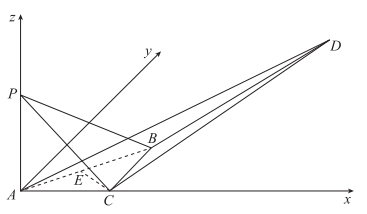
，，．

设为平面的法向量，，，有．

平面的法向量．

有．

所以平面与平面所成二面角的正弦值为．



17．解：（1），其判别式．

若函数有三个不同零点，则必有极大值点与极小值点．

故，从而其必要条件为．

（3）令．

．

．

．

由，可知．

所以在定义域上单调递增，则其仅有唯一零点，不妨记为，可知在上，在上，故先减后增．

所以至多有两个不同的零点，不妨设为，，从而在上递增，，递减，递增．

从而至多有三个不同零点．

所以方程至多有3个实数根．

18．（1）设，则．

过的切线方程为，所以

由和，得．

设，则即

由，得为所求的方程．

（2）设内切圆圆心为，点*G*，*H*，*J*分别为圆与，，的切点．

（i）由（1）可知，轨迹是以为焦点的双曲线，由双曲线定义可知，，，．

由，有，*r*为内切圆的半径．

从而，

有．

又，所以切点与重合，设，

有，．

联立有，所以．

（ii）设，过点作的角平分线，交轴于点，设，，，由角平分线定理，，有，解得．

从而．

设切线为，与双曲线方程联立，解得，所以切线即为，从而．

延长至，使得，连结，有，设过原点的与处切线平行的直线与交于点，由于为中点，所以为中点，又，所以．

从而．所以．

19．（1）因为，所以用第一行各元素分别除以0．6，可得给定条件下的条件分布列：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |

（2）二维离散随机变量的概率为，有由，

．

于是，．

由，有．

（3）由（2）知，对于二维离散随机变量，．

设他需要小时离开迷宫，记表示第一次所选的门，事件表示选第个门，

由题设有．

因为选第一个门后30分钟可离开迷宫，所以．

又因为选第二个门后50分钟回到原处，所以．

又因为选第三个门后70分钟也回到原处，所以．

所以．

解得，即他平均要150分钟才能离开迷宫．