**绝密★启用前（全国卷）**

**理科数学试卷**

**注意事项：**

**1.答卷前，考生务必将自己的姓名､准考证号填写在答题卡上.**

**2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效**

**3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.**

**一､选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1.已知集合，若的子集有4个，则的值为（ ）

A.-3 B.-1 C.2 D.3

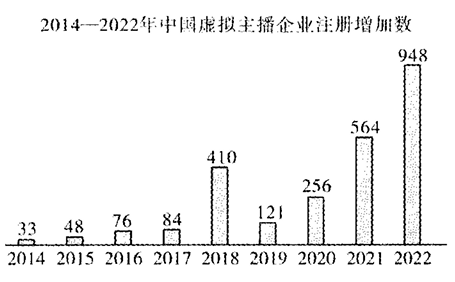
2.已知复数，则在复平面内对应点的坐标为（ ）

A. B. C. D.

3.已知点为平面内不同的四点，若，且，则（ ）

A. B. C. D.

4.近几年随着技术的发展，虚拟人的智能化水平得到极大的提升，虚拟主播逐步走向商用，如图为2014~2022年中国虚拟主播企业注册年增加数（较上一年增加的数量）条形图，根据该图，下列说法错误的是（ ）



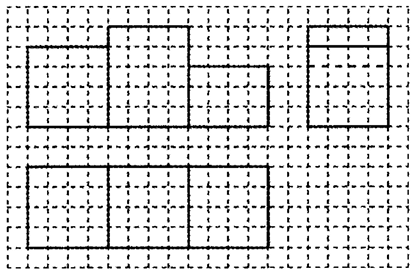
A.2014~2022年中国虚拟主播企业注册数量逐年增加

B.2014~2022年中国虚拟主播企业注册年增加数的中位数为410

C.2014~2022年中国虚拟主播企业注册年增加数的极差为915

D.从图中9年企业注册增加数字中任取2个数字，这两个数字的平均数大于110的概率为

5.如图，网格纸中小正方形的边长为，粗线画出的是某体育比赛领奖台三视图，则该领奖台除去下底面的所有面的面积之和为（ ）



A. B. C. D.

6.已知实数满足约束条件，则的取值范围是（ ）

A. B. C. D.

7.中，则的面积为（ ）

A. B. C. D.

8.若存在过原点的直线与函数的图象切于轴右侧，则的取值范围是（ ）

A. B. C. D.

9.知名数学教育家单墫曾为中学生写了一个小册子《十个有趣的数学问题》，其中提到了开普勒的最密的将球装箱的方法：考虑一个棱长为2的正方体，分别以该正方体的8个顶点及6个面的中心为球心作半径为的球，则这些球在正方体内的体积之和与正方体的体积之比为（ ）

A. B. C. D.

10.已知点为坐标原点，点为直线与椭圆的一个交点，点在上，，若，则的长轴长为（ ）

A. B.3 C. D.6

11.已知，则（ ）

A. B.

C. D.

12.已知第一象限内的点在双曲线上，点关于原点的对称点为是的左､右焦点，点是的内心（内切圆圆心），在轴上的射影为，记直线的斜率分别为，且，则的离心率为（ ）

A.2 B.8 C. D.

**二､填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.**

13.的展开式中的系数为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

14.函数是偶函数，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

15.平面几何中有一个著名的塞尔瓦定理：三角形任意一个顶点到其垂心（三角形三条高的交点）的距离等于外心（外接圆圆心）到该顶点对边距离的2倍.若点都在圆上，直线方程为，且的垂心在内，点在线段上，则圆的标准方程为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

16.已知，给出下列命题：①的图象关于点对称；②的值域为；③在区间上有33个零点；④若方程在区间有4个不同的解，其中，则的收值范围是.其中所有正确命题的序号为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.（少选､错选都不给分）

**三､解答题：共70分.解答应写出文字说明､证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答.第22､23题为选考题，考生根据要求作答.**

**（一）必考题：共60分.**

17.（12分）

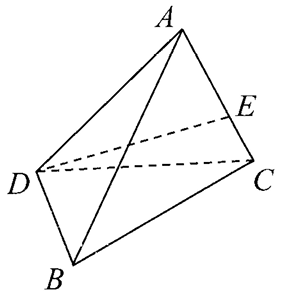
已知等差数列的前项和为，公差，且成等比数列.

（1）求；

（2）若，数列的前项和为，求.

18.（12分）

如图，在三棱锥中，，其余各棱的长均为6，点在棱上，，过点的平面与直线垂直，且与分别交于点.



（1）确定的位置，并证明你的结论；

（2）求直线与平面所成角的正弦值.

19.（12分）

某高中数学兴趣小组，在学习了统计案例后，准备利用所学知识研究成年男性的臂长与身高之间的关系，为此他们随机统计了5名成年男性的身高与臂长，得到如下数据：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 159 | 165 | 170 | 176 | 180 |
|  | 67 | 71 | 73 | 76 | 78 |

（1）根据上表数据，可用线性回归模型拟合与的关系，请用相关系数加以说明；

（2）建立关于的回归方程（系数精确到0.01）；

（3）从5名样本成年男性中任取2人，记这2人臂长差的绝对值为，求.

参考数据：

参考公式：相关系数，回归方程中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为.

20.（12分）

已知倾斜角为的直线与抛物线只有1个公共点的焦点为，直线的倾斜角为.

（1）求证：；

（2）若，直线与直线交于点，直线与的另一个交点为，求证：.

21.（12分）

已知函数.

（1）若的导数分别为，且，求的取值范围；

（2）用表示中的最小值，设，若，判断的零点个数.

**（二）选考题：共10分.请考生在第22､23题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.**

22.[选修4-4：坐标系与参数方程]（10分）

在直角坐标系中，直线的参数方程为（为参数），以坐标原点为极点，轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线的极坐标方程为.

（1）求直线的极坐标方程；

（2）若直线与交于点，求的周长.

23.选修4-5：不等式选讲

已知.

（1）若，求的最小值；

（2）若，证明：.

**绝密★启用前（全国卷）**

**理科数学参考答案**

1.【答案】C

【解析】因为，且的子集有4个，则中有2个元素，且这两个元素为2，3，所以，故选C.

2.【答案】A

【解析】因为，所以，所以在复平面内对应的点的坐标为，故选A.

3.【答案】D

【解析】由得，即，又，所以，故选D.

4.【答案】B

【解析】由每年增加数均为正数，可得*A*正确；20142022年中国虚拟主播企业注册年增加数的中位数为121，*B*错误；20142022年中国虚拟主播企业注册年增加数的极差为948-33=915，*C*正确；当且仅当从33，48，76，84，121中任取两个数字，其平均数不大于110，所以所求概率为正确，故选B.

5.【答案】B

【解析】解法一：该领奖台可看作由3个长方体构成的组合体，每个长方体的底面都是边长为的正方形，冠军台高，亚军台高，季军台高，该领奖台除去下底面的所有面的面积之和为3个长方体的表面积之和减去3个边长为的正方形面积，减去2个底边长为高为的矩形面积，减去2个底边长为高为的矩形面积，即，故选B.

解法二：该领奖台可看作由3个长方体构成的组合体，每个长方体的底面都是边长为的正方形，冠军台高，亚军台高，季军台高，前后两个面的面积之和为，

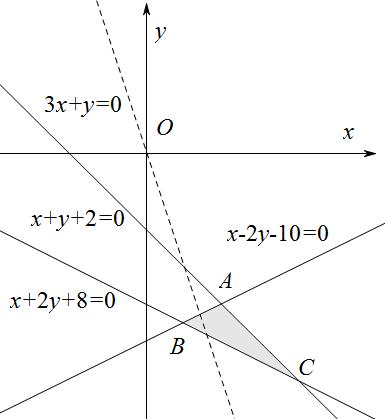
上面3个面的面积之和为，左右4个侧面的面积之和为，所以该组合体除去下底面的所有面的面积之和为，故选B.

6.【答案】C

【解析】如图所示，不等式组表示的可行域是以为顶点的三角形区域，设，则，作直线，把该直线平移到点处

取得最大值，，平移到点处取得最小值，

，所以的取值范围是，故选C.



7.【答案】B

【解析】因为，由余弦定理得



，所以，所以的面积为，故选B.

8.【答案】D

【解析】因为，则，设切点为，则，即，整理得，所以，故选D.

9.【答案】D

【解析】以8个顶点为球心的球各有在正方体内，以6个面的中心为球心的球各有在正方体内，所以这些球在正方体的体积之和为4个半径为的球的体积之和，所以这些球在正方体内的体积之和与正方体的体积之比为，故选D.

10.【答案】C

【解析】设，由得，由可得，所以，所以，所以的长轴长为，故选C.

11.【答案】A

【解析】设，则在上单调递减，所以，所以，

，所以，

故选A.

12.【答案】A

【解析】设圆与分别切于点，则，且，所以，点，设，则，所以，所以，，故选A.

13.【答案】-1

【解析】的展开式中的系数为.

14.【答案】

【解析】因为是偶函数，所以，所以.

15.【答案】

【解析】由的垂心到直线距离，设圆半径为，由塞尔瓦定理可得

，由圆的几何性质可得，联立解得，因为直线方程为，所以直线方程为，设，则到直线距离，解得（舍去）或，所以圆的标准方程为.

16.【答案】①④（少选､错选都不给分）

【解析】由，可得①正确；由得，当

，②正确；，令得或，，所以在上有31个零点，③错误；是以为周期的周期函数，当时在上有2个实根，且；当时在上没有实根，在上有2个实根，且，，所以，所以的取值范围是，④正确，所以正确命题的序号为①②④.

17.【解析】（1）由得

，所以，

因为成等比数列，

所以，即，

把代入上式得，

解得或，

当时，，不符合题意，

当时，，

所以

（2）因为，当为偶数时，，

所以



.

18.【解析】（1）取中点，连接，

由已知可得，

所以，

因为，所以平面，

因为平面，

所以平面平面，

过作的平行线与的交点即为，过作的平行线与的交点即为，

因为，

所以，

所以当时，平面与直线垂直.

（2）由题意可得，因为，所以，

以为原点，直线分别为轴，轴，过点与平面垂直的直线为轴建立如图所示的空间直角坐标系，则，

所以

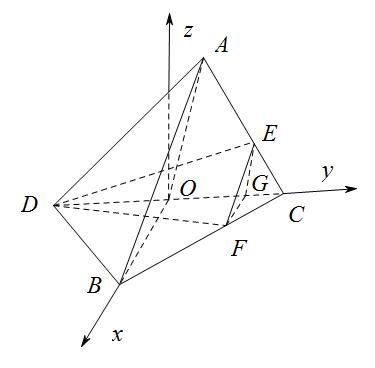
设平面的一个法向量为，则有，得，

取，得，

设直线与平面所成角为，

则，

所以直线与平面所成角的正弦值为.



19.【解析】（1）由表中的数据和附注中的参考数据得

，

，

，

.

因为与的相关系数近似为0.997，说明与的线性相关程度相当高，从而可以用线性回归模型拟合与的关系.

（2）由及（1）得，

，

所以关于的回归方程为

（说明：根据，得出.正确，）

（3）的取值依次为，

，

，



所以

20.【解析】（1）方法1：设，则的方程为，

与联立得，

因为直线与抛物线只有1个公共点，

所以，整理得，

所以，

又，

所以，

因为，

所以，

所以

方法2：易知点在第一象限，且直线与相切于点，由，得，

所以的方程为，

设与交于点，则，

所以由抛物线的几何性质可知，

故

（2）时，的方程为，

把代入得的方程为，

把代入得，

所以，

由（1）知，，设，

设直线方程为，与联立得，

是该方程的两个根，所以，所以，

所以，

所以

21.【解析】（1）因为，

所以，由得，

因为，

所以，

所以问题转化为时恒成立，即时恒成立，

设，则时单调递减，时单调递增，

所以，

所以，即的取值范围是.

（2）因为，设，

则，

（i）若，

时单调递增，

时单调递减，

所以，

所以时，

没有零点，

（ii）若，

由（1）知在上单调递增，且，

所以，

当时，单调递增，且，

存在唯一使得，

，

当时，，

在上单调递减，且，

所以存在唯一使得，

综上，时没有零点，时有2个零点.

22.【解析】（1）将中的参数消去，得，

把代入

得直线的极坐标方程为.

（2）解法一：设，

由方程组得，

所以，即.

因为点到直线的距离，

所以，

所以的周长为

解法二：由，

得的直角坐标方程为，

即，

曲线是以为圆心，半径为2的圆，

点到直线的距离，

所以，

直线与直线垂直，点到直线的距离，

所以，

所以的周长为

23.【解析】（1）因为，

所以，

当时等号成立，

所以的最小值为2.

（2）因为且，

要证，

即证，

即证，

整理得，

所以即证，

而

，等号在时成立.

所以成立.