**浙江省五校联盟2023-2024学年高三下学期3月联考**

**数学试卷**

**命题:浙江省杭州第二中学**

**一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.**

1.若全集,集合A,B及其关系如图所示,则图中阴影部分表示的集合是( )



A. B. C. D.

2.已知,且,则与的夹角的余弦值为( )

A. B. C. D.

3.设*b*,*c*表示两条直线,表示两个平面,则下列说法中正确的是( )

A.若,则 B.若,则

C.若,则 D.若,则

4.已知角的终边过点,则( )

A. B. C. D.

5.设等比数列的公比为,前项和为,则“”是“为等比数列”的( )

A.充分不必要条件 B.必要不充分条件 C.充要条件 D.既不充分也不必要条件

6.已知实数*x*,*y*满足,且,则的最小值为( )

A. B.8 C. D.

7.已知双曲线的左、右焦点分别为,点为双曲线的左顶点,以为直径的圆交双曲线的一条渐近线于*P*,*Q*两点,且,则该双曲线的离心率为( )

A. B. C. D.

8.在等边三角形*ABC*的三边上各取一点*D*,*E*,*F*,满足,则三角形ABC的面积的最大值是( )

A. B. C. D.

**二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.**

9.在学校组织的《青春如火,初心如炬》主题演讲比赛中,有8位评委对每位选手进行评分(评分互不相同),将选手的得分去掉一个最低评分和一个最高评分,则下列说法中正确的是( )

A.剩下评分的平均值变大 B.剩下评分的极差变小

C.剩下评分的方差变小 D.剩下评分的中位数变大

10.在三棱锥中,已知,点*M*,*N*分别是*AD*,*BC*的中点，则( )

A.*MN*⊥*AD* B.异面直线*AN*,*CM*所成的角的余弦值是

C.三棱锥的体积为 D.三棱锥的外接球的表面积为

11.已知函数,则( )

A.的零点为

B.的单调递增区间为

C.当时,若恒成立,则

D.当时,过点作的图象的所有切线,则所有切点的横坐标之和为

**三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.**

12.直线的一个方向向量是 .

13.甲、乙两人争夺一场羽毛球比赛的冠军,比赛为“三局两胜”制.如果每局比赛中甲获胜的概率为,乙获胜的概率为,则在甲获得冠军的情况下,比赛进行了三局的概率为 .

14.已知函数及其导函数的定义域均为,记,若均为偶函数,且当时,,则 .

**四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15.(本小题满分13分)如图,斜三棱柱的底面是直角三角形,,点在底面ABC内的射影恰好是*BC*的中点,且.



(I)求证:平面平面;

(II)若斜棱柱的高为,求平面与平面夹角的余弦值.

16.(本小题满分15分)己知函数,其中.

(I)若曲线在处的切线在两坐标轴上的截距相等,求的值;

(II)是否存在实数,使得在上的最大值是-3?若存在,求出的值;若不存在,说明理由.

17.(本小题满分15分)记复数的一个构造:从数集中随机取出2个不同的数作为复数的实部和虚部.重复次这样的构造,可得到个复数,将它们的乘积记为.

已知复数具有运算性质:,其中.

(I)当时,记的取值为,求的分布列;

(II)当时,求满足的概率;

(III)求的概率.

18.(本小题满分17分)在平面直角坐标系xOy中,我们把点称为自然点.按如图所示的规则,将每个自然点进行赋值记为,例如,.



(I)求;

(II)求证:;

(III)如果满足方程,求的值.

19.(本小题满分17分)在平面直角坐标系*xOy*中,过点的直线与抛物线交于*M*,*N*两点在第一象限).

(I)当时,求直线的方程;

(II)若三角形*OMN*的外接圆与曲线交于点(异于点*O*,*M*,*N*),

(i)证明:△*MND*的重心的纵坐标为定值，并求出此定值;

(ii)求凸四边形*OMDN*的面积的取值范围.

**参考答案**

**一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合要求的.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 答案 | C | B | D | B | C | A | C | A |

**二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 题号 | 9 | 10 | 11 |
| 答案 | BC | ABD | ACD |

**三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.**

12.(答案不唯一) 13. 14.-6

**四、解答题:本大题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15.(本小题满分13分)(第I问,6分;第II问,7分)



解:(I)取BC中点为,连接在底面内的射影恰好是*BC*中点,

平面*ABC*,又平面,

又,

平面平面,

又平面平面平面.

(II)以为坐标原点,建立如图所示空间直角坐标系,,

,

,

设平面的法向量为,

则有,令,则,

设平面的法向量为,

则有,令则,

,

平面与平面夹角的余弦值为.

16.(本小题满分15分)(第I问,6分;第II问,9分)

(I),则,

故曲线在处的切线为,

即,

当时,此时切线为,不符合要求

当时,令,有,

令,有,故,即,故

(II),

①当时,在上单调递增,

的最大值是,解得,舍去;

②当时,由,得,

当,即时,时,时,,

的单调递增区间是,单调递减区间是,

又在上的最大值为;

当,即时,在上单调递增,,

解得,舍去.综上,存在符合题意,此时

17.(本小题满分15分)(第I问,6分;第II问,4分;第III问,5分)

(I)由题意可知,可构成的复数为,



的可能取值为,

，

，

所以分布列为:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 1 |  | 2 | 3 |  | 4 |
|  |  |  |  |  |  |  |

(II)共有种,

满足的情况有:

①3个复数的模长均为1,共有种;

②3个复数中,2个模长均为1,1个模长为或者2,共有种;

所以.

(III)当或2时,显然都满足,此时;

当时,满足共有三种情况:

①个复数的模长均为1,则共有;

②个复数的模长为1,剩余1个模长为或者2,则共有;

③个复数的模长为1,剩余2个模长为或者2,则共有.

故,

此时当均成立.

所以.

18.(本小题满分17分)(第I问,4分;第II问,7分;第III问,6分)

解:(I)根据图形可知,

(II)固定,则为一个高阶等差数列,且满足



所以



所以,,所以



P(*x*+1,*y*-1)+P(*x*,*y*+1)+P(*x*+1,*y*)+P(*x*+1,*y*+1)=2024

等价于,

等价于

即,

化简得,

由于增大,也增大,

当时,,

当时,,

故当时,,即

19.(本小题满分17分)(第I问,4分;第II问,5分;第III问,8分)

解:(I)设直线

联立,消去,得,

所以,

,则

,则,又由题意,

直线的方程是;

(II)(i)方法1:设

因为*O*,*M*,*D*,*N*四点共圆,设该圆的方程为,

联立,消去,得,

即，

所以即为关于的方程的3个根,

则,

因为,

由的系数对应相等得,,所以的重心的纵坐标为0.

方法2:设,则,

因为O,M,C,N四点共圆,所以,即,





化简可得:,

所以的重心的纵坐标为0.

(ii)记的面积分别为,由已知得直线MN的斜率不为0设直线,联立,消去,得,所以,

所以,

由(i)得,,

所以,即,

因为,

点到直线MN的距离,

所以,

所以

在第一象限,即,

依次连接O,M,D,N构成凸四边形*OMDN*,所以,即,

又因为,即,即,

所以,即,即,

所以,

设,则,

令,则,

因为,所以,所以在区间上单调递增,所以,

所以的取值范围为.