

2024 届高三第二次调研测试

数 学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知单位向量 e_1, e_2 的夹角为 120° ，则 $(2e_1 - e_2) \cdot e_2 =$

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

【答案】A

【解析】 $(2e_1 - e_2) \cdot e_2 = 2e_1 \cdot e_2 - e_2 \cdot e_2 = -1 - 1 = -2$. 故选 A.

2. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，下列关系正确的是

- A. $AD \perp B_1C$ B. $A_1D \perp BD$ C. $AC \perp A_1C$ D. $AC_1 \perp CD_1$

【答案】D

【解析】以 D 为原点，以 DA 为 x 轴，以 DC 为 y 轴，以 DD_1 为 z 轴建立空间直角坐标系，可以得到 $\overrightarrow{AC_1} = (-1, 1, 1)$ ， $\overrightarrow{CD_1} = (0, -1, 1)$ ，可以得到 $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{CD_1} = 0$. 因此可以得到 $AC_1 \perp CD_1$. 其它选项可以用类似方法计算. 故选 D.

3. 一组样本数据删除一个数后，得到一组新数据：10, 21, 25, 35, 36, 40. 若这两组数据的中位数相等，则删除的数为

- A. 25 B. 30 C. 35 D. 40

【答案】B

【解析】新数据的中位数为 $\frac{25+35}{2} = 30$ ，与原数据中位数保持一致，但原数据个数为奇数，因此中位数一定在数据中. 所以删去的数据为 30. 故选 B.

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 2^{-x} & x \leq 3, \\ f(\frac{x}{2}) & x > 3. \end{cases}$ 则 $f(\log_2 9) =$

- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{80}{9}$ D. $\frac{82}{9}$

【答案】B

【解析】 $\log_2 9 = 2\log_2 3$ ，又因为 $\log_2 9 > 3$ ，所以 $f(\log_2 9) = f(\log_2 3)$. 又因为 $\log_2 3 < 3$ ，所以 $f(\log_2 3) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ ，故选 B.

5. 设 $x > 0, y > 0, \frac{1}{x} + 2y = 2$ ，则 $x + \frac{1}{y}$ 的最小值为

A. $\frac{3}{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$

D. 3

【答案】C

【解析】 $\frac{1}{x} + 2y = 2$, 得 $x = \frac{1}{2-2y}$, 所以 $x + \frac{1}{y} = \frac{1}{2-2y} + \frac{2}{2y} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2-2y} + \frac{2}{2y})[(2-2y) + 2y]$
 $= \frac{1}{2} \cdot (3 + \frac{2y}{2-2y} + \frac{2-2y}{y}) \geq \frac{1}{2} \cdot (3 + \sqrt{\frac{2y}{2-2y} \cdot \frac{2-2y}{y}}) = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$, 故选 C.

6. 若函数 $f(x) = e^{ax} + 2x$ 有大于零的极值点, 则实数 a 的取值范围为

A. $a > -2$

B. $a > -\frac{1}{2}$

C. $a < -2$

D. $a < -\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】 $f(x) = e^{ax} + 2x$, $f'(x) = ae^{ax} + 2 = 0$. 解得 $x = \frac{1}{a} \ln(-\frac{2}{a})$. 已知函数 $f(x)$ 有大于 0 的极值点, 则 $\frac{1}{a} \ln(-\frac{2}{a}) > 0$, 解得 $a < -2$. 故选 C.

7. 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , C 的准线与 x 轴交于点 A , 过 A 的直线与 C 在第一象限的交点为 M, N , 且 $|FM| = 3|FN|$, 则直线 MN 的斜率为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】 $A(-1, 0)$, 设 $MN: y = k(x+1) (k > 0)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$. $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. 联立

$$\begin{cases} y = k(x+1), \\ y^2 = 4x. \end{cases} \text{ 所以 } k^2x^2 + (2k^2 - 4)x + k^2 = 0, x_1 + x_2 = -2 + \frac{4}{k^2}, x_1x_2 = 1. \text{ 因为 } |FM| = 3|FN|,$$

所以 $x_1 + 1 = 3(x_2 + 1)$, 代入上式可得, $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$. 因此 $x_1 + x_2 = \frac{10}{3} = \frac{4}{k^2} - 2$, 解得 $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (舍去), 故选 A.

8. 若 $\cos a$, $\cos(a - \frac{\pi}{6})$, $\cos(a + \frac{\pi}{3})$ 成等比数列, 则 $\sin 2a =$

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{4}$

【答案】B

【解析】 $\cos(a - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos a + \frac{1}{2} \sin a$, $\cos(a + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \cos a - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a$. $\cos a \cdot \cos(a + \frac{\pi}{3}) = \cos^2(a - \frac{\pi}{6})$, 化简得 $-\frac{1}{4}(\sin^2 a + \cos^2 a) = \sqrt{3} \sin a \cdot \cos a = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2a$, 所以 $\sin 2a = -\frac{\sqrt{3}}{6}$. 故选 B.

二、多项选择题，本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有错选的得0分。

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的右焦点为 F ，直线 $l: x + by = 0$ ，是 C 的一条渐近线，

P 是 l 上一点，则

A. C 的虚轴长为 $2\sqrt{2}$

B. C 的离心率为 $\sqrt{6}$

C. $|PF|$ 的最小值为 2

D. 直线 PF 的斜率不等于 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】AD

【解析】 $\frac{1}{b} = \frac{b}{2}$ ， $b = \sqrt{2}$ ，故 C 的虚轴长为 $2b = 2\sqrt{2}$ ，A 正确； C 的离心率为 $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，B 错误； $|PF|$ 的最小值为 $b = \sqrt{2}$ ，C 错误；注意到 PF 与直线 $l: y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ 相交，故直线 PF 的斜率不等于 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，D 正确，故选 AD.

10. 已知 $P(A) = \frac{1}{5}$ ， $P(B|A) = \frac{1}{4}$ ，若随机事件 A, B 相互独立，则

A. $P(B) = \frac{1}{3}$

B. $P(AB) = \frac{1}{20}$

C. $P(\bar{A}|B) = \frac{1}{20}$

D. $P(A + \bar{B}) = \frac{4}{5}$

【答案】BD

【解析】因为随机事件 A, B 相互独立，所以 $P(B) = P(B|A) = \frac{1}{4}$ ，A 错误； $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{20}$ ，B 正确； $P(\bar{A}|B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{4}{5}$ ，C 错误； $P(A + \bar{B}) = 1 - P(\bar{A}B) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(B) = \frac{4}{5}$ ，D 正确，故选 BD.

11. 已知函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} ， $f(x)$ 的图像关于点 $(2, 0)$ 对称， $g(0) = g(2) = 1$ ， $g(x + y) + g(x - y) = g(x)f(y)$ ，则

A. $f(x)$ 为偶函数

B. $g(x)$ 为偶函数

C. $g(-1 - x) = -g(-1 + x)$

D. $g(1 - x) = g(1 + x)$

【答案】ACD

【解析】令 $y = -y$ ， $g(x + y) + g(x - y) = g(x)f(-y)$ ，注意到 $g(x)$ 不恒为 0，故 $f(y) = f(-y)$ ，A 正确； $f(2) = 0$ ，令 $x = 0$ ， $y = 2$ ，得 $g(2) + g(-2) = 0$ ，故 $g(-2) = -1 \neq g(2)$ ，B 错误；令 $x = y = -1$ ， $g(-2) + g(0) = g(-1)f(-1) = 0$ ，令 $x = y = 1$ ， $g(2) + g(0) = g(1)f(1) = 2$ ，故 $g(1), f(1) \neq 0$ ，从而 $f(-1) \neq 0$ ，故 $g(-1) = 0$ ，令 $x = -1$ ，得 $g(-1 + y) + g(-1 - y) = 0$ ，化简得 $g(-1 - y) = -g(-1 + y)$ ，C 正确；令 $y = 2$ ，得 $g(x + 2) + g(x - 2) = 0$ ，而 $g(1 - x) = -g(x - 3) = g(1 +$

x), D 正确, 故选 ACD.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 设 $m \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位. 若集合 $A = \{1, 2m + (m-1)i\}$, $B = \{-2i, 1, 2\}$, 且 $A \subseteq B$, 则 $m = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

【答案】1

【解析】由 $A \subseteq B$ 知 $2m + (m-1)i = -2i$ 或 2 . 若为 $-2i$, 则 $m = -1$, $2m + (m-1)i = -2 - 2i$, 舍去; 若为 2 , $m = 1$, $2m + (m-1)i = 2$, 符合题意, 故 $m = 1$.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{7}$, $AC = 1$, M 为 BC 的中点, $\angle MAC = 60^\circ$, 则 $AM = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】取 AB 中点 D , 连接 DM , 则 $AD = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $DM = \frac{1}{2}$, $DM \parallel AC$, 故 $\angle AMD = 60^\circ$, 在 $\triangle AMD$ 中, 过 D 向 AM 作高, 垂足为 E , 则 $DE = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $ME = \frac{1}{4}$, $AE = \frac{5}{4}$, 则 $AM = \frac{3}{2}$.

14. 若正四棱锥的棱长均为 2, 则以所有棱的中点为顶点的十面体的体积为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$, 该十面体的外接球的表面积为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

【答案】 $\frac{5\sqrt{2}}{6}$, 4π

【解析】十面体的体积等于正四棱锥的体积减去顶部的小正四棱锥和角上的四个小四棱锥, 正四棱锥的高 $h = \sqrt{l^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2}l)^2} = \sqrt{2}$, $V = \frac{1}{3}l^2h = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $V_1 = \frac{V}{8} = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $V_2 = \frac{V}{16} = \frac{\sqrt{2}}{12}$, 故十面体的体积 $V_0 = V - V_1 - 4V_2 = \frac{5\sqrt{2}}{6}$, 注意到底面中心到所有顶点距离均为 $\frac{l}{2}$, 故十面体外接球表面积 $S = 4\pi(\frac{l}{2})^2 = 4\pi$.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

甲公司推出一种新产品, 为了解某地区消费者对新产品的满意度, 从中随机调查了 1000 名消费者, 得到下表:

	满意	不满意
男	440	60
女	460	40

(1) 能否有 95% 的把握认为消费者对新产品的满意度与性别有关,

(2) 若用频率估计概率, 从该地区消费者中随机选取 3 人, 用 X 表示不满意的人数,

求 X 的分布列与数学期望.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$$n=a+b+c+d.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.1	0.05	0.01
k	2.706	3.841	6.635

$$\text{解: (1) } K^2 = \frac{1000 \times (440 \times 40 - 460 \times 60)^2}{500 \times 500 \times 900 \times 100} \approx 4.444 > 3.841,$$

所以, 有 95% 的把握认为消费者对新产品的满意度与性别有关.

$$(2) \text{根据频率, 单个消费者满意的概率为 } \frac{900}{1000} = \frac{9}{10},$$

$$\text{单个消费者不满意的概率为 } 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10},$$

X 可能的取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{729}{1000}, \quad P(X=1) = C_3^1 \times \left(\frac{1}{10}\right) \times \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{243}{1000},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \left(\frac{9}{10}\right) = \frac{27}{1000}, \quad P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{729}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

$$X \text{ 的期望为 } E(X) = 0 \times \frac{729}{1000} + 1 \times \frac{243}{1000} + 2 \times \frac{27}{1000} + 3 \times \frac{1}{1000} = \frac{3}{10}.$$

16. (15 分)

设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$). 已知 $f(x)$ 的图象的两条相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且 $f(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$.

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, m)$ 上有最大值无最小值, 求实数 m 的取值范围;

(2) 设 l 为曲线 $y=f(x)$ 在 $x=-\frac{\pi}{6}$ 处的切线, 证明: l 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一的公共点.

解: (1) 由题意知, 周期为 π , 所以 $\omega=2$, 又 $f(-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$,

所以 $\sin(-\frac{\pi}{2}+\varphi)=-\cos\varphi=-\frac{1}{2}$, $\cos\varphi=\frac{1}{2}$, 而 $0<\varphi<\pi$, 故 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,

从而 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$,

当 $x\in(0, m)$ 时, $2x+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3}, 2m+\frac{\pi}{3})$, 故 $\frac{\pi}{2}<2m+\frac{\pi}{3}\leq\frac{3\pi}{2}$, 解得 $\frac{\pi}{12}<m\leq\frac{7\pi}{12}$,

故 m 的取值范围 $(\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$.

(2) $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$, 切点为 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$,

$f'(x)=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$, $f'(-\frac{\pi}{6})=2$, 故切线 $l: y=2x+\frac{\pi}{3}$,

令 $t=2x+\frac{\pi}{3}$, $g(t)=t-\sin t$, $g'(t)=1-\cos t\geq 0$,

故 $g(t)$ 在 \mathbf{R} 上单调增, 而 $g(0)=0$, 故 $g(t)=0$ 有唯一解 $t=0$,

即 $2x+\frac{\pi}{3}-\sin(2x+\frac{\pi}{3})=0$ 有唯一解 $x=-\frac{\pi}{6}$.

17. (15 分)

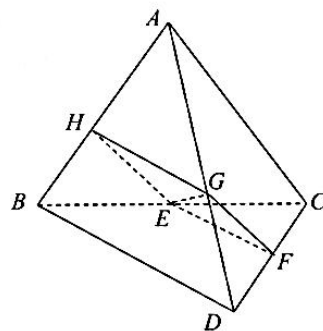
如图, 边长为 4 的两个正三角形 ABC , BCD 所在平面互相垂直, E , F 分别为 BC , CD 的中点, 点 G 在棱 AD 上, $AG=2GD$, 直线 AB 与平面 EFG 相交于点 H .

(1) 从下面两个结论中选一个证明:

① $BD\parallel GH$; ② 直线 HE , GF , AC 相交于一点;

注: 若两个问题均作答, 则按照第一个计分.

(2) 求直线 BD 与平面 EFG 的距离.



(1) 证明: ① 因为 E , F 分别为 BC , CD 的中点, 所以 $EF\parallel BD$,

因为 $BD\not\subset$ 平面 EFG , $EF\subset$ 平面 EFG , 所以 $BD\parallel$ 平面 EFG ,

因为 $BD\subset$ 平面 ABD , 平面 $ABD\cap$ 平面 $EFG=GH$, 所以 $BD\parallel GH$;

(2) 解: 连 AE , DE ,

因为在正三角形 ABC 中, E 是 BC 的中点, 所以 $AE\perp BC$, 同理 $DE\perp BC$,

所以 $AE \perp$ 平面 BCD , 因为 $DE \subset$ 平面 BCD , 所以 $AE \perp DE$,

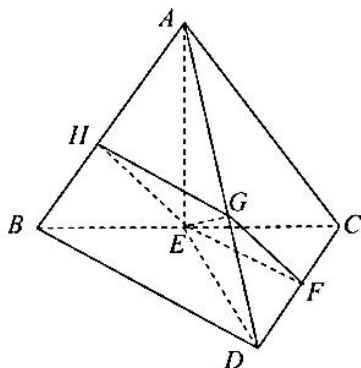
在 $\triangle DFG$ 中,由余弦定理得 $GF = \sqrt{DF^2 + DG^2 - 2DF \cdot DG \cdot \cos \angle ADC} = 2$,

因为 E, F 分别为 BC, CD 的中点, 所以 $EF = \frac{1}{2}BD = 2$,

所以 $\sin \angle FEG = \sqrt{1 - \cos^2 \angle FEG} = \frac{\sqrt{21}}{6}$, 所以 $S_{\triangle FEG} = \frac{1}{2} EF \cdot EG \cdot \sin \angle FEG = \frac{\sqrt{35}}{3}$,

注意到 $V_{D-EFG} = V_{G-DEF}$, 故 $S_{\triangle DEF} \cdot \frac{1}{3}AE = S_{\triangle EFG} \cdot d$,

从而直线 BD 与平面 EFG 的距离 $d = \frac{S_{\triangle DEF} \cdot AE}{3S_{\triangle EFG}} = \frac{S_{\triangle ABC} \cdot AE}{12S_{\triangle EFG}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}BC}{12 \times \frac{\sqrt{35}}{3}} = \frac{6\sqrt{35}}{35}$.



18. (17 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = a_n - 4a_{n+1}$, $a_1 = -1$,

(1) 证明: 数列 $\{2a_{n+1} - a_n\}$ 为等比数列;

(2) 设 $b_n = \frac{a_{n+4}}{n(n+1)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和;

(3) 是否存在正整数 $p, q (p < 6 < q)$, 使得 S_p, S_6, S_q 成等差数列? 若存在, 求 p, q ; 若不存在, 说明理由.

解: (1) 因为 $S_n = a_n - 4a_{n+1}$, 所以 $a_1 = a_1 - 4a_2$, 所以 $a_2 = 0$,

$n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = -4a_{n+1}$, $S_n = -4a_{n+2}$,

所以 $a_n = -4a_{n+2} + 4a_{n+1}$, 所以 $2a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(2a_{n+1} - a_n)$,

$2a_2 - a_1 = 1 \neq 0$, 所以 $2a_3 - a_2 = \frac{1}{2} \neq 0$, \dots , $2a_{n+1} - a_n \neq 0$,

所以 $\frac{2a_{n+2} - a_{n+1}}{2a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{2}$,

所以 $\{2a_{n+1} - a_n\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

(2) 由 (1) $2a_{n+1} - a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$, 所以 $2^{n+1}a_{n+1} - 2^n a_n = 2$,

所以 $\{2^n a_n\}$ 是首项为 -2 为首项, 2 为公差的等差数列,

所以 $2^n a_n = 2n - 4$, $a_n = \frac{2n-4}{2^n}$,

$b_n = \frac{a_{n+4}}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n(n+1)2^{n+3}} = \frac{2(n+1)-n}{n(n+1)2^{n+3}} = \frac{1}{n2^{n+2}} - \frac{1}{(n+1)2^{n+3}}$,

所以 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$T_n = \frac{1}{1 \cdot 2^3} - \frac{1}{2 \cdot 2^4} + \frac{1}{2 \cdot 2^4} - \frac{1}{3 \cdot 2^5} + \dots + \frac{1}{n2^{n+2}} - \frac{1}{(n+1)2^{n+3}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{(n+1)2^{n+3}},$$

$$(3) S_n = a_n - 4a_{n+1} = \frac{2n-4}{2^n} - 4 \frac{2n-2}{2^{n+1}} = -\frac{n}{2^{n-1}},$$

S_p, S_6, S_q 成等差数列, 则 $\frac{p}{2^{p-1}} + \frac{q}{2^{q-1}} = \frac{3}{8}$,

当 $p=1, 2, 3, 4$ 时, $\frac{p}{2^{p-1}} > \frac{3}{8}$, 则 $\frac{p}{2^{p-1}} + \frac{q}{2^{q-1}} > \frac{3}{8}$,

当 $p=5$ 时, $\frac{q}{2^{q-1}} = \frac{1}{16}$,

$n \geq 6$ 时, $\frac{n+1}{2^n} - \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1-n}{2^n} < 0$, 所以 $\{\frac{n}{2^{n-1}}\} (n \geq 6)$ 单调递减,

又 $\frac{8}{2^7} = \frac{1}{16}$, 所以 $q=8$.

所以存在 $p=5, q=8$, 使得 S_5, S_6, S_8 成等差数列.

19. (17 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 直线 l 与 Γ 相切, 与圆 $O: x^2 + y^2 = 3a^2$ 相交于 A, B 两点. 当 l 垂直于 x 轴时, $|AB| = 2\sqrt{6}$.

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 对于给定的点集 M, N , 若 M 中的每个点在 N 中都存在距离最小的点, 且所有最小距离的最大值存在, 则记此最大值为 $d(M, N)$.

(i) 若 M, N 分别为线段 AB 与圆 O , P 为圆 O 上一点, 当 $\triangle PAB$ 的面积最大时, 求 $d(M, N)$;

(ii) 若 $d(M, N), d(N, M)$ 均存在, 记两者中的较大者为 $H(M, N)$, 已知 $H(X, Y), H(Y, Z), H(X, Z)$ 均存在, 证明: $H(X, Z) + H(Y, Z) \geq H(X, Y)$.

解: (1) 当 l 垂直于 x 轴时, $AB = 2\sqrt{3a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a = 2\sqrt{6}$, 解得 $a = \sqrt{3}$.

离心率 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{3 - b^2}}{\sqrt{3}}$, 解得 $b^2 = 1$,

所以 $\Gamma: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2)(i) 设 O 到 AB 的距离为 d , 则 $AB = 2\sqrt{9 - d^2}$,

$$S_{\triangle PAB} \leq (3+d)\sqrt{9-d^2} = \sqrt{(3+d)^2(3-d)} = \sqrt{\frac{1}{2}(3+d)(3+d)(6-2d)} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \times 4^3},$$

当且仅当 $3+d=6-2d$, $d=1$, 即 $AB: y=1$ 或 $y=-1$ 时取 “=” .

由对称性, 不妨设 $AB: y=1$,

M 中的点 $K(x, 1)$, 则圆 O 上的点到 $K(x, 1)$ 的最小距离为 $3-\sqrt{x^2+1}$,

所以当 $x=0$ 时, 最小距离的最大值为 2,

故 $d(M, N)=2$;

(ii) 设 $H(X, Y)$ 为点集 X 中的点 A 与点集 Y 中的 B 之间的距离,

不妨设点 A 到 Y 中距离最小的点为 B .

假设点 A 到点集 Z 中距离最近的点为 C , 则 $H(X, Z) \geq AC$,

设点 C 到集合 Y 中距离最近的点为 D , 则 $H(Y, Z) \geq CD$,

则 $H(X, Y) = |AB| \leq AD \leq AC + CD \leq H(X, Z) + H(Y, Z)$.

所以: $H(X, Z) + H(Y, Z) \geq H(X, Y)$.