**2024届普通高等学校招生全国统一考试**

**数 学**

**全卷满分150分，考试时间120分钟．**

**注意事项：**

**1．答卷前，考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上．**

**2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．**

**3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．已知集合，，则的真子集个数为（ ）

A．2 B．3 C．4 D．7

2．已知i为虚数单位，复数*z*满足，则（ ）

A． B．1 C． D．2

3．已知单位向量，的夹角为，则（ ）

A．9 B． C．10 D．

4．据科学研究表明，某种玫瑰花新鲜程度*y*与其花朵凋零时间*t*（分钟）（在植物学上*t*表示从花朵完全绽放时刻开始到完全凋零时刻为止所需的时间）近似满足函数关系式：（*b*为常数），若该种玫瑰花在凋零时间为10分钟时的新鲜程度为，则当该种玫瑰花新鲜程度为时，其凋零时间约为（参考数据：）（ ）

A．3分钟 B．30分钟 C．33分钟 D．35分钟

5．已知某圆台的体积为，其上、下底面圆的面积之比为且周长之和为，则该圆台的高为（ ）

A．6 B．7 C．8 D．9

6．已知抛物线，过点且斜率为的直线*l*交*C*于*M*，*N*两点，且，则*C*的准线方程为（ ）

A． B． C． D．

7．已知数列是单调递增数列，，，则实数*m*的取值范围为（ ）

A． B． C． D．

8．已知离散型随机变量*X*的分布列如下，则的最大值为（ ）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 |
| *P* | *a* |  |  |

A． B． C． D．1

**二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．**

9．某高中从本校的三个年级中随机调查了五名同学关于生命科学科普知识的掌握情况，五名同学的成绩如下：84，72，68，76，80，则（ ）

A．这五名同学成绩的平均数为78 B．这五名同学成绩的中位数为74

C．这五名同学成绩的上四分位数为80 D．这五名同学成绩的方差为32

10．已知正实数*a*，*b*满足，则的可能取值为（ ）

A．2 B． C． D．4

11．在平面直角坐标系中，*O*为坐标原点，，，，点*M*的轨迹为，则（ ）

A．为中心对称图形

B．*M*到直线距离的最大值为5

C．若线段上的所有点均在中，则最大为

D．使成立的*M*点有4个

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．**

12．的展开式中含的项的系数为\_\_\_\_\_\_．

13．已知，则\_\_\_\_\_\_．

14．三个相似的圆锥的体积分别为，，，侧面积分别为，，，且，，则实数*a*的最大值为\_\_\_\_\_\_．

**四、解答题：共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

15．（13分）

已知函数．

（1）若，求曲线在点处的切线方程；

（2）若，研究函数在上的单调性和零点个数．

16．（15分）

2024年由教育部及各省教育厅组织的九省联考于1月19日开考，全程模拟高考及考后的志愿填报等．某高中分别随机调研了50名男同学和50名女同学对计算机专业感兴趣的情况，得到如下2×2列联表．

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 对计算机专业感兴趣 | 对计算机专业不感兴趣 | 合计 |
| 男同学 | 40 |  |  |
| 女同学 |  | 20 |  |
| 合计 |  |  |  |

（1）完善以上的2×2列联表，并判断根据小概率值的独立性检验，能否认为该校学生是否对计算机专业感兴趣与性别有关；

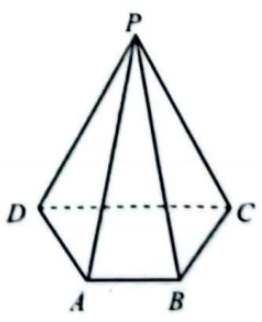
（2）将样本的频率作为概率，现从全校的学生中随机抽取30名学生，求其中对计算机专业感兴趣的学生人数的期望和方差．

附：，其中．

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0.1 | 0.05 | 0.01 |
|  | 2.706 | 3.841 | 6.635 |

17．（15分）

如图，在四棱锥中，平面平面，四边形为等腰梯形，且，为等边三角形，平面平面直线*l*．



（1）证明：平面；

（2）若*l*与平面的夹角为，求四棱锥的体积．

18．（17分）

已知椭圆的左、右顶点分别为*A*、*B*，且，点在椭圆*C*上．

（1）求椭圆*C*的标准方程；

（2）若*E*，*F*为椭圆*C*上异于*A*，*B*的两个不同动点，且直线与的斜率满足，证明：直线恒过定点．

19．（17分）

三阶行列式是解决复杂代数运算的算法，其运算法则如下：

．

若，则称为空间向量与的叉乘，其中（），（），为单位正交基底．以*O*为坐标原点、分别以的方向为*x*轴、*y*轴、*z*轴的正方向建立空间直角坐标系，已知*A*，*B*是空间直角坐标系中异于*O*的不同两点．

（1）①若，，求；

②证明：．

（2）记的面积为，证明：．

（3）证明：的几何意义表示以为底面、为高的三棱锥体积的6倍．

**数学参考答案**

1．B【解析】由题意可得，故的真子集的个数为．故选B．

2．A【解析】因为，则，所以，故．故选A．

3．B【解析】由题意得．故，故选B．

4．C【解析】由题意得，则，令，即，解得．故选C．

5．D【解析】设上、下底面圆的半径分别为*r*，*R*，圆台的高为*h*，则由题意可得解得，则，解得．故选D．

6．D【解析】设，，直线，

联立得，

则，，又*l*经过*C*的焦点，

则，解得，故*C*的准线方程为．故选D．

7．C【解析】由题意可得，由于数列为单调递增数列，即，，整理得，令，则，，易得数列单调递减，故是数列的最大项，则*m*的取值范围为，故选C．

8．C【解析】，故，

易得，，则，

故，，又因为，所以．故选C．

9．CD【解析】A选项，这五名同学成绩的平均数为，A错误；

B选项，将五名同学的成绩按从小到大排列：68，72，76，80，84，则这五名同学成绩的中位数为76，B错误；

C选项，，故成绩从小到大排列后，第4个数即为上四分位数，即80，C正确；

D选项，五名同学成绩的方差为，D正确．故选CD．

10．BD【解析】由题意可得，

令，则，，且，故，所以．故选BD．

11．ABC【解析】由题可得，故点*M*在以*A*为圆心、半径分别为1，2的两圆之间（包含边界），为内径为1，外径为2的圆环，A正确；直线过定点，故*M*到直线的距离最大时为*M*与点的距离，则，B正确；当恰与圆相切时，最大，此时直线与*y*轴重合，故，C正确；，则直线：或，直线与直线有无数点在上，故符合的*M*点有无数个，故D错误．故选ABC．

12．1120【解析】的展开式的通项为，故令可得含项的系数为．

13．【解析】由，可得，

故．

14．【解析】设三个圆锥的高分别为．母线与轴线的夹角为，

则，由，得，

同理由可得，

则，则．

令，，得，令，解得；令，解得，故在上单调递增，在上单调递减，所以，

故，故．

15．解：（1）当时，，

则，则，，

所以曲线在点处的切线方程为．

（2）当时，，则，

当时，，，，则，

故在上单调递增．

又因为，所以在上的零点个数为1．

16．解：（1）完善2×2列联表如下：公众号：高中试卷君

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 对计算机专业感兴趣 | 对计算机专业不感兴趣 | 合计 |
| 男同学 | 40 | 10 | 50 |
| 女同学 | 30 | 20 | 50 |
| 合计 | 70 | 30 | 100 |

则，

故根据小概率值的独立性检验，不能认为该校学生是否对计算机专业感兴趣与性别有关．

（2）由（1）知，对计算机专业感兴趣的样本频率为，

设抽取的30名学生中对计算机专业感兴趣的学生的人数为*X*，所以随机变量，

故，．

17．解：（1）证明：由题可知，平面，平面，

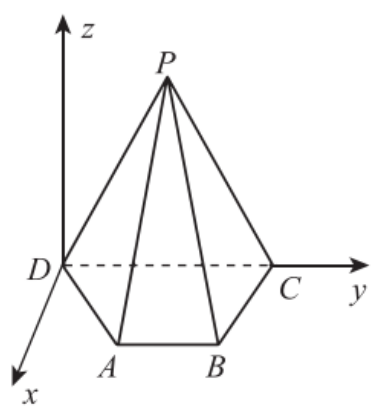
平面．

又平面，平面平面，．

又平面，平面，

平面．

（2）以*D*为原点，平面内垂直于的直线为*x*轴，所在直线为*y*轴，垂直于平面的直线为*z*轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



设等腰梯形的高为，则，，，，，

设为平面的法向量，则即

令得为平面的一个法向量．

又，则可得直线*l*的一个平行向量，

设为*l*与平面的夹角，

由，解得．

．

18．解：（1）由题意可得，则，

又点在*C*上，所以，解得，

故椭圆*C*的标准方程为．

（2）证明：由（1）可得，，，易知直线与直线的斜率一定存在且不为0，

设直线的方程为，直线的方程为．

由得，

所以，故，则，故．

由得，所以，

故，则，故．

若直线过定点，则根据椭圆的对称性可知直线所过定点必在*x*轴上，

设定点为．

则，

即，

所以，

化简可得，故，即直线过定点．

19．解：（1）①因为，，

则．

②证明：设，，

则，

将与互换，与互换，与互换，

可得，

故．

（2）证明：因为，

故，

故要证，

只需证，

即证．

由（1），，，

故，

又，，，

则成立，

故．

（3）证明：由（2），

得，

故，

故的几何意义表示以为底面、为高的三棱锥体积的6倍．