

# 2024 年天津市八所重点学校高三毕业班联考

## 数学试卷 评分标准

一. 选择题：本题共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分.

1. B 2. B 3. C 4. A 5. C 6. D 7. A 8. A 9. B

二. 填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分. 试题中包含 2 个空的，答对 1 个空的得 3 分，全部答对的得 5 分.

10. 2                      11. -10                      12.  $\pm\sqrt{3}$ ,  $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$  (四个答案写出其中一个即可)

13. 正, 0.99              14. 3,  $\frac{\sqrt{21}}{2}$               15.  $(-\infty, 0] \cup [\frac{2}{3}, +\infty) \cup \{\frac{1}{e^3}\}$

三. 解答题(本大题 5 小题，共 75 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

16. (本小题满分 14 分)

(1) 解:

法一:

由  $c - 2b + 2a \cos C = 0$ ，根据正弦定理有  $\sin C - 2 \sin B + 2 \sin A \cos C = 0$ ， .....1 分

因为  $\sin B = \sin(A + C)$ ，所以

$$\sin C - 2 \sin(A + C) + 2 \sin A \cos C = \sin C - 2 \sin A \cos C - 2 \cos A \sin C + 2 \sin A \cos C = 0$$

整理得  $\sin C - 2 \cos A \sin C = 0$ ， .....2 分

因为  $\sin C \neq 0$ ，所以  $\cos A = \frac{1}{2}$  因为  $A \in (0, \pi)$ ，所以  $A = \frac{\pi}{3}$  .....4 分

法二:

由  $c - 2b + 2a \cos C = 0$ ，根据余弦定理有  $c - 2b + 2a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0$  .....1 分

整理得  $bc - 2b^2 + a^2 + b^2 - c^2 = 0$ ，即  $b^2 + c^2 - a^2 = bc$  .....2 分

$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$ ，因为  $A \in (0, \pi)$ ，所以  $A = \frac{\pi}{3}$  . .....4 分

(2) 因为  $a = \sqrt{3}$ ,  $c = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , 由 (1) 知  $A = \frac{\pi}{3}$

(i) 由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ， $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin C} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ， $\therefore \sin C = \frac{\sqrt{6}}{4}$  .....5 分

又因为  $c < a$ ，所以  $\angle C$  为锐角， $\therefore \cos C = \frac{\sqrt{10}}{4}$  .....6 分

$$\text{所以 } \sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \cos 2C = 1 - 2 \sin^2 C = \frac{1}{4} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \sin(2C + A) = \sin 2C \cos A + \cos 2C \sin A = \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{8} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(ii) 法一: 由  $c - 2b + 2a \cos C = 0$ , 将  $a = \sqrt{3}$ ,  $c = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,  $\cos C = \frac{\sqrt{10}}{4}$  代入,

$$\text{解得 } b = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{30}}{4}, \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{30}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{15}}{16} \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

法二:  $\because \sin B = \sin(C + A)$

$$\therefore \sin B = \sin C \cos A + \cos C \sin A = \frac{\sqrt{6}}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{10}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{30}}{8} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{30}}{8} = \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{15}}{16}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

## 17. (本小题满分 15 分)

(1) 证明: 法一:

取  $CD$  的中点  $M$ , 连接  $EM$

因为  $AB \parallel CD$ ,  $AB = \frac{1}{2}CD$ , 所以  $AB \parallel DM$ , 且  $AB = DM$ ,

所以四边形  $ADMB$  为平行四边形, 所以  $AD \parallel BM$ , 且  $AD = BM$ , .....2 分

又因为四边形  $ADEF$  为正方形,

所以  $EF \parallel BM$ , 且  $EF = BM$ , 所以四边形  $FEMB$  为平行四边形, .....3 分

所以  $BF \parallel EM$ , 又因为  $BF \not\subset$  面  $CDE$ ,  $EM \subset$  面  $CDE$  .....4 分

所以  $BF \parallel$  平面  $CDE$ .

法二:

因为  $AB \parallel CD$ ,  $AB \not\subset$  面  $CDE$ ,  $CD \subset$  面  $CDE$ ,

所以  $AB \parallel$  平面  $CDE$ , .....2 分

同理,  $AF \parallel$  平面  $CDE$ , 又  $AB \cap AF = A$ , 所以平面  $ABF \parallel$  平面  $CDE$ , .....3 分

因为  $BF \subset$  平面  $ABF$ , .....4 分

所以  $BF \parallel$  平面  $CDE$ .

(2)因为平面  $ADEF \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $ADEF \cap$  平面  $ABCD = AD$ ,  $CD \perp AD$ ,

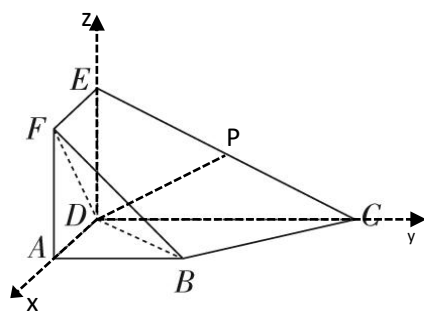
$CD \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $CD \perp$  平面  $ADEF$ , 又  $DE \subset$  平面  $ADEF$ ,

故  $CD \perp ED$ .

而四边形  $ADEF$  是正方形, 所以  $AD \perp DE$ ,

又  $CD \perp AD$ , 以  $D$  为原点,  $DA, DC, DE$  所在直线分别为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴, 建立空间直角坐标系



$Dxyz$

.....5 分

$AD = 1$ , 则  $D(0,0,0)$ ,  $A(1,0,0)$ ,  $B(1,1,0)$ ,  $F(1,0,1)$ ,  $C(0, 2,0)$ ,  $E(0, 0,1)$ ,  $P(0, 1, \frac{1}{2})$

$$\overrightarrow{DP} = (0, 1, \frac{1}{2})$$

.....6 分

设平面  $BDF$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DF} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x + y = 0, \\ x + z = 0, \end{cases}$$

令  $x = 1$ , 则  $y = z = -1$ , 所以  $\mathbf{n} = (1, -1, -1)$ .

.....8 分

设直线  $DP$  与平面  $BDF$  所成角的大小为  $\alpha$ ,

.....9 分

$$\text{则} \sin \alpha = |\cos \langle \overrightarrow{DP}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{DP} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{DP}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

.....11 分

所以直线  $DP$  与平面  $BDF$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ . (设角或答话写一个即可)

(3)取平面  $CDE$  的一个法向量  $\overrightarrow{DA} = (1, 0, 0)$ ,

.....12 分

设平面  $BDF$  与平面  $CDE$  夹角的大小为  $\theta$ ,

.....13 分

$$\text{则} \cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{DA}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{DA} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{DA}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

.....15 分

所以平面  $BDF$  与平面  $CDE$  夹角的余弦值是  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . (设角或答话写一个即可)

18. (本小题满分 15 分)

解: (1)由题意可得 $a - c = \frac{1}{4} \cdot 2c$

$$\therefore 2a = 3c$$

……1 分

椭圆的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

……2 分

(2)

(i)由(1)可知 $a^2 = \frac{9}{4}c^2, b^2 = \frac{5}{4}c^2$

$$\therefore A(-\frac{3}{2}c, 0)$$

设椭圆方程为 $\frac{4x^2}{9c^2} + \frac{4y^2}{5c^2} = 1$

……3 分

法一:

由题意可知直线  $PQ$  的斜率显然不为 0

设直线  $PQ$  方程为:  $x = my + c, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$

$$\text{联立} \begin{cases} 20x^2 + 36y^2 = 45c^2 \\ x = my + c \end{cases},$$

消去 $x$ 整理得 $(20m^2 + 36)y^2 + 40mcy - 25c^2 = 0$

……4 分

由题意知  $\Delta > 0$  恒成立

$$\text{则 } y_1 + y_2 = \frac{-10mc}{5m^2+9}, y_1y_2 = \frac{-25c^2}{20m^2+36}$$

……5 分

$$\text{则 } S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} |AF_2| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} c \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{5}{4} c^2 \cdot \frac{15\sqrt{m^2+1}}{5m^2+9}$$

……6 分

令 $t = \sqrt{m^2 + 1}$ , 则 $t \geq 1$

$$\therefore S_{\triangle APQ} = \frac{75}{4} c^2 \cdot \frac{t}{5t^2+4} = \frac{75}{4} c^2 \cdot \frac{1}{5t+\frac{4}{t}}, \text{ 因为 } y = 5t + \frac{4}{t} \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

当 $t = 1$ 时,  $S_{\triangle APQ}$ 有最大值

$$(S_{\triangle APQ})_{\max} = \frac{75}{4} c^2 \cdot \frac{1}{5+4} = \frac{25}{3}$$

$$\therefore c^2 = 4$$

……8 分

$$\therefore c = 2, a = 3, b = \sqrt{5}$$

椭圆方程为:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

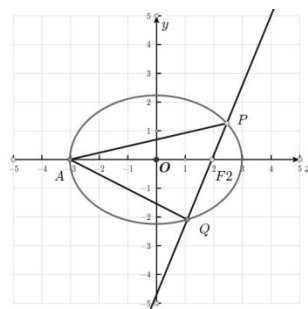
……9 分

法二: 当直线  $PQ$  的斜率存在时, 由题知,  $k \neq 0$

此时, 设  $PQ: y = k(x - c)$

$$\text{联立} \begin{cases} 20x^2 + 36y^2 = 45c^2 \\ y = k(x - c) \end{cases}, \text{ 得 } (20 + 36k^2)x^2 - 72k^2cx + 36k^2c^2 - 45c^2 = 0$$

……4 分



设  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$  , 由题意知  $\Delta > 0$  恒成立

$$x_1 + x_2 = \frac{72k^2c}{20+36k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{36k^2c^2 - 45c^2}{20+36k^2} \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta APQ} &= \frac{1}{2} \cdot |AF_2| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2}c \cdot |kx_1 - kx_2| = \frac{5}{4}c \cdot |k| \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \frac{5}{4}c \cdot |k| \sqrt{\left(\frac{72k^2c}{20+36k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{36k^2c^2 - 45c^2}{20+36k^2}} = \frac{75}{4}c^2 \cdot |k| \cdot \frac{\sqrt{1+k^2}}{5+9k^2} = \frac{75}{4}c^2 \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}{\frac{5}{k^2}+9} \quad (k \neq 0) \end{aligned}$$

$\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$\text{令 } t = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} > 1, \quad \therefore S_{\Delta APQ} = \frac{75c^2}{4} \cdot \frac{t}{5(t^2-1)+9} = \frac{75c^2}{4} \cdot \frac{t}{5t^2+4} = \frac{75c^2}{4} \cdot \frac{1}{5t + \frac{4}{t}}$$

因为  $y = 5t + \frac{4}{t}$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

$$\therefore 5t + \frac{4}{t} > 9 (t > 1), \quad \therefore S_{\Delta APQ} = \frac{75c^2}{4} \cdot \frac{1}{5t + \frac{4}{t}} < \frac{75c^2}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{25c^2}{12} \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

当直线  $PQ$  的斜率不存在时, 此时  $PQ: x = c$ , 代入  $\frac{4x^2}{9c^2} + \frac{4y^2}{5c^2} = 1$  中,

$$\text{得 } |PQ| = \frac{5c}{3}, \quad \therefore S_{\Delta APQ} = \frac{1}{2} \cdot |AF_2| \cdot |PQ| = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}c \cdot \frac{5}{3}c = \frac{25}{12}c^2, \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

所以  $\therefore \Delta APQ$  面积的最大值为  $\frac{25}{12}c^2 = \frac{25}{3}, \therefore c^2 = 4$

$$\text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

(ii)法一: 由 (i) 知  $A(-3, 0), F_2(2, 0)$

$$\therefore k_{AP} = \frac{y_1}{x_1+3}, \quad k_{AQ} = \frac{y_2}{x_2+3}$$

$\therefore$  直线  $AP$  的方程为:  $y = \frac{y_1}{x_1+3} \cdot (x+3)$ , 直线  $AQ$  的方程为:  $y = \frac{y_2}{x_2+3} \cdot (x+3)$

$$\therefore M\left(\frac{3}{4}, \frac{15y_1}{4(x_1+3)}\right), \quad N\left(\frac{3}{4}, \frac{15y_2}{4(x_2+3)}\right) \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \overrightarrow{F_2M} = (-\frac{5}{4}, \frac{15y_1}{4(x_1+3)}), \overrightarrow{F_2N} = (-\frac{5}{4}, \frac{15y_2}{4(x_2+3)}) \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{由 } c=2, \text{ 得 } y_1 + y_2 = \frac{-20m}{5m^2+9}, y_1y_2 = \frac{-25}{5m^2+9}, x = my + 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{F_2M} \cdot \overrightarrow{F_2N} &= \frac{25}{16} + \frac{225}{16} \cdot \frac{y_1y_2}{(x_1+3)(x_2+3)} \\ &= \frac{25}{16} + \frac{225}{16} \cdot \frac{y_1y_2}{(my_1+5)(my_2+5)} \\ &= \frac{25}{16} + \frac{225}{16} \cdot \frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2 + 5m(y_1+y_2) + 25} \\ &= \frac{25}{16} + \frac{225}{16} \cdot \frac{y_1y_2}{m^2 \cdot \frac{-25}{5m^2+9} + 5m \cdot \frac{-20m}{5m^2+9} + 25} \end{aligned}$$

$$= \frac{25}{16} + \frac{225}{16} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = 0 \quad \dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\therefore F_2M \perp F_2N$$

$\therefore$  以  $MN$  为直径的圆恒过右焦点. \dots\dots 15 \text{ 分}

法二：由 (i) 知  $A(-3,0), F_2(2,0)$

当直线  $PQ$  的斜率不存在时，有  $P(2, \frac{5}{3}), Q(2, -\frac{5}{3})$

直线  $AP: y = \frac{1}{3}x + 1$ ，令  $x = \frac{3}{4}$ ，得  $M(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ ，同理  $N(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$

$$\text{此时 } \overrightarrow{F_2M} \cdot \overrightarrow{F_2N} = \left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}\right) = 0 \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

当直线  $PQ$  的斜率存在时， $y = k(x-2)$

$$\therefore k_{AP} = \frac{y_1}{x_1+3}, k_{AQ} = \frac{y_2}{x_2+3}$$

$\therefore$  直线  $AP$  的方程为： $y = \frac{y_1}{x_1+3} \cdot (x+3)$ ，直线  $AQ$  的方程为： $y = \frac{y_2}{x_2+3} \cdot (x+3)$

$$\therefore M(\frac{3}{4}, \frac{15y_1}{4(x_1+3)}), N(\frac{3}{4}, \frac{15y_2}{4(x_2+3)}) \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \overrightarrow{F_2M} = (-\frac{5}{4}, \frac{15y_1}{4(x_1+3)}), \overrightarrow{F_2N} = (-\frac{5}{4}, \frac{15y_2}{4(x_2+3)}) \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{由 } c=2, \quad x_1+x_2=\frac{36k^2}{5+9k^2}, \quad x_1 \cdot x_2=\frac{36k^2-45}{5+9k^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{F_2M} \cdot \overrightarrow{F_2N} &= \frac{25}{16} + \frac{225}{16} \cdot \frac{y_1 y_2}{(x_1+3)(x_2+3)} = \frac{25}{16} + \frac{225}{16} \cdot \frac{k^2(x_1-2)(x_2-2)}{(x_1+3)(x_2+3)} \\ &= \frac{25}{16} + \frac{225}{16} \cdot \frac{k^2[x_1 x_2 - 2(x_1+x_2) + 4]}{x_1 x_2 + 3(x_1+x_2) + 9} = \frac{25}{16} + \frac{225}{16} \cdot \frac{k^2[\frac{36k^2-45}{5+9k^2} - 2 \cdot \frac{36k^2}{5+9k^2} + 4]}{\frac{36k^2-45}{5+9k^2} + 3 \cdot \frac{36k^2}{5+9k^2} + 9} \\ &= \frac{25}{16} + \frac{225}{16} \cdot \frac{k^2[36k^2-45-72k^2+20+36k^2]}{36k^2-45+108k^2+45+81k^2} = \frac{25}{16} - \frac{225}{16} \cdot \frac{25k^2}{225k^2} = 0 \quad \cdots \cdots 14 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\therefore F_2M \perp F_2N$$

$\therefore$  以  $MN$  为直径的圆恒过右焦点. \cdots \cdots 15 \text{ 分}

### 19. (本小题满分 15 分)

解: (1) 设数列  $\{a_n\}$  首项  $a_1=2$  公比  $q(q>0)$ , 设数列  $\{b_n\}$  首项  $b_1=1$  公差  $d$

$$\therefore \begin{cases} a_5=4a_3 \\ a_2=b_4 \end{cases}, \begin{cases} a_1 q^4=4a_1 q^2 \\ a_1 q=b_1+3d \end{cases}, \quad \cdots \cdots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore q=2, q=-2(\text{舍}), d=1$$

$$\therefore a_n=2^n, b_n=n \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

$$(2) T_{4n} = (b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 + b_4^2) + (b_5^2 - b_6^2 - b_7^2 + b_8^2) + \cdots + (b_{4n-3}^2 - b_{4n-2}^2 - b_{4n-1}^2 + b_{4n}^2)$$

$$b_{4n-3}^2 - b_{4n-2}^2 - b_{4n-1}^2 + b_{4n}^2 = (4n-3)^2 - (4n-2)^2 - (4n-1)^2 + (4n)^2 = 4 \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore T_{4n} = 4n, \frac{T_{4n} \cdot b_{n+2}}{a_{n+2}} = \frac{n(n+2)}{2^n}, \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

$$\text{集合 } \left\{ n \mid \lambda \leq \frac{n(n+2)}{2^n}, n \in N^* \right\}, \text{ 设 } D_n = \frac{n(n+2)}{2^n}$$

$$D_{n+1} - D_n = \frac{(n+1)(n+3)}{2^{n+1}} - \frac{n(n+2)}{2^n} = \frac{-n^2+3}{2^{n+1}}, \text{ 所以当 } \cdots \cdots 7 \text{ 分}$$

$n=1$  时,  $D_2 > D_1$ , 当  $n \geq 2$  时,  $D_2 > D_3 > D_4 > \cdots$ .  $D_1 = \frac{3}{2}$ ,  $D_2 = 2$ ,  $D_3 = \frac{15}{8}$ ,  $D_4 = \frac{3}{2}$ ,  $D_5 = \frac{35}{32}$ , 因为

集合有 4 个元素,  $\frac{35}{32} < \lambda \leq \frac{3}{2}$ .

.....8 分

$$(3) C_n = \begin{cases} \frac{4\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2^{n+2} \cdot \sqrt{n(n+2)}}, & n \text{ 为奇数}, \\ n \cdot 2^n, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad S_{2n} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_{2n}$$

$$\text{设 } A_n = C_2 + C_4 + C_6 + \cdots + C_{2n} = 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^6 + \cdots + 2n \cdot 2^{2n}$$

$$4A_n = 2 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^6 + \cdots + (2n-2) \cdot 2^{2n} + 2n \cdot 2^{2n+2} \quad \text{.....9 分}$$

$$-3A_n = 8 + 2(2^4 + 2^6 + 2^8 + \cdots + 2^{2n}) - 2n \cdot 2^{2n+2} = 8 + 2 \frac{2^4 - 2^{2n} \cdot 4}{1-4} - 2n \cdot 2^{2n+2} \quad \text{.....10 分}$$

$$= 8 - \frac{32}{3} + \frac{2 \cdot 2^{2n+2}}{3} - 2n \cdot 2^{2n+2} = -\frac{8}{3} + \left(\frac{2}{3} - 2n\right) \cdot 2^{2n+2}$$

$$\text{所以, } A_n = \frac{8}{9} + \left(\frac{2}{3}n - \frac{2}{9}\right) \cdot 2^{2n+2} \quad \text{.....11 分}$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } C_n = \frac{4\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2^{n+2} \cdot \sqrt{n(n+2)}} < \frac{4\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{2^{n+2} \cdot \sqrt{n(n+2)}} = \frac{1}{2^n \cdot \sqrt{n}} - \frac{1}{2^{n+2} \cdot \sqrt{n+2}} \quad \text{.....13 分}$$

$$\begin{aligned} B_n &= C_1 + C_3 + C_5 + \cdots + C_{2n-1} < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot \sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{2^3 \cdot \sqrt{3}} - \frac{1}{2^5 \cdot \sqrt{5}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{2n-1} \cdot \sqrt{2n-1}} - \frac{1}{2^{2n+1} \cdot \sqrt{2n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2n+1} \cdot \sqrt{2n+1}} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

.....14 分

$$S_{2n} = A_n + B_n < \frac{8}{9} + \left(\frac{2}{3}n - \frac{2}{9}\right) \cdot 2^{2n+2} + \frac{1}{2} = \frac{25}{18} + \left(\frac{2}{3}n - \frac{2}{9}\right) \cdot 4^{n+1} \quad \text{.....15 分}$$

20. (本小题满分 16 分)

$$\text{解: (1) } a=1 \text{ 时, } f(x) = e^x - xe^x + \ln x, \quad f'(x) = -xe^x + \frac{1}{x} \quad \text{.....1 分}$$

$$\therefore f'(1) = -e + 1, \quad \text{.....2 分}$$

$$\text{又 } f(1) = 0 \quad \text{.....3 分}$$

$$\text{所以切线方程为: } y = (1-e)x - 1 + e \quad \text{.....4 分}$$



(2) (i) 当  $a > e$  时,  $f(x) = a \ln x - (x-1)e^x$ ,  $f'(x) = \frac{a}{x} - e^x \cdot x = \frac{a - e^x \cdot x^2}{x}$ , .....5 分

令  $g(x) = a - e^x \cdot x^2 (x > 0)$ ,  $g'(x) = -e^x(x^2 + 2x) < 0$ , .....6 分

则  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

由  $a > e$ , 得  $\ln a > 1$ ,  $\ln^2 a > 1$ , 则  $1 - \ln^2 a < 0$ ,

又  $g(1) = a - e > 0$ ,  $g(\ln a) = a - e^{\ln a} \cdot \ln^2 a = a(1 - \ln^2 a) < 0$ , .....8 分

由零点存在性定理可知, 存在唯一  $x_1 \in (1, \ln a)$  使  $g(x_1) = 0$ , 即  $a - e^{x_1} x_1^2 = 0$ , .....9 分

当  $x \in (0, x_1)$  时,  $g(x) > 0$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, x_1)$  上单调递增,

当  $x \in (x_1, +\infty)$  时,  $g(x) < 0$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在  $(x_1, +\infty)$  上单调递减, .....10 分

则  $f(x)$  在  $x = x_1$  处取得极大值, 即  $f(x)$  存在唯一的极值点  $x_1$ .

(ii) 由 (i) 可知,  $a - e^{x_1} x_1^2 = 0$ , 即  $\frac{a}{x_1^2} = e^{x_1}$ , ①

由  $x_0 > x_1$ , 且  $x_1 \in (1, \ln a)$ , 得  $x_0 > 1$ ,

由  $f(x_0) = 0$ , 得  $a \ln x_0 - (x_0 - 1)e^{x_0} = 0$ ,  $\frac{a \ln x_0}{x_0 - 1} = e^{x_0}$ , ②

②式除以①式, 得  $e^{x_0 - x_1} = \frac{x_1^2 \ln x_0}{x_0 - 1}$ , .....11 分

先证  $\ln x < x - 1, (x > 1)$ ,

令  $\varphi(x) = \ln x - x + 1$ ,  $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} < 0$ ,  $\therefore \varphi(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减,

所以  $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$ ,

所以  $x_0 > 1$  时,  $0 < \ln x_0 < x_0 - 1$  则  $\frac{\ln x_0}{x_0 - 1} < 1$ ,

则  $e^{x_0 - x_1} = \frac{x_1^2 \ln x_0}{x_0 - 1} < x_1^2$ ,  $x_0 - x_1 < 2 \ln x_1$ , .....12 分

要证明  $x_0 < \frac{5x_1^2 + x_1 - 3}{2x_1 + 1}$ , 等价于证明  $x_0 - x_1 < \frac{5x_1^2 + x_1 - 3}{2x_1 + 1} - x_1$ ,

等价于证明  $(x_0 - x_1)(2x_1 + 1) < 3(x_1^2 - 1)$

由  $x_0 - x_1 < 2\ln x_1$ , 且  $2x_1 + 1 > 0$ , 有  $(x_0 - x_1)(2x_1 + 1) < 2\ln x_1 \cdot (2x_1 + 1) \cdots \cdots 13$  分

法一: 设  $h(x) = \ln x - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}), (x > 1)$ ,

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = \frac{2x - x^2 - 1}{2x^2} = \frac{-(x-1)^2}{2x^2} < 0$$

$\therefore h(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 所以  $h(x) < h(1) = 0 \cdots \cdots 14$  分

所以, 当  $x_1 > 1$  时, 有  $2\ln x_1 < x_1 - \frac{1}{x_1}$ , 所以  $(x_0 - x_1)(2x_1 + 1) < 2\ln x_1 \cdot (2x_1 + 1) < (x_1 - \frac{1}{x_1})(2x_1 + 1)$ ,  
 $\cdots \cdots 15$  分

$$\text{又 } (x_1 - \frac{1}{x_1})(2x_1 + 1) - 3(x_1^2 - 1) = -x_1^2 + x_1 - \frac{1}{x_1} + 1 = -(x_1 + 1)\frac{(x_1 - 1)^2}{x_1} < 0,$$

$$\text{得 } (x_1 - \frac{1}{x_1})(2x_1 + 1) < 3(x_1^2 - 1), \cdots \cdots 16 \text{ 分}$$

故  $(x_0 - x_1)(2x_1 + 1) < 3(x_1^2 - 1)$  成立. 证毕

法二: 设  $t(x) = 2\ln x - 3 \cdot \frac{x^2 - 1}{2x + 1}, (x > 1)$ , 则  $\cdots \cdots 14$  分

$$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{2}{x} - 3 \cdot \frac{2x^2 + 2x + 2}{(2x + 1)^2} = -2 \cdot \frac{3x^3 - x^2 - x - 1}{x(2x + 1)^2} \\ &= -2 \cdot \frac{(x-1)(3x^2 + 2x + 1)}{x(2x + 1)^2} = -2 \cdot \frac{(x-1)\left[3(x + \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3}\right]}{x(2x + 1)^2} < 0, \end{aligned} \cdots \cdots 15 \text{ 分}$$

得  $t(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 则  $t(x) < t(1) = 0$ , 所以, 当  $x_1 > 1$  时, 得  $2\ln x_1 < 3 \cdot \frac{x_1^2 - 1}{2x_1 + 1}$ , 则

$(2x_1 + 1) \cdot 2\ln x_1 < 3(x_1^2 - 1)$ , 故  $(x_0 - x_1)(2x_1 + 1) < 3(x_1^2 - 1)$  成立. 得证  $\cdots \cdots 16$  分