**辽宁省名校联盟2023年高三12月份联合考试**

**数 学**

**命题人：辽宁名校联盟试题研发中心 审题人：辽宁名校联盟试题研发中心**

**本试卷满分150分，考试时间120分钟．**

**注意事项：**

**1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．**

**2．答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．**

**3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．已知集合，，则（ ）

A． B． C． D．

2．若复数为纯虚数，则（ ）

A．5 B． C．3 D．

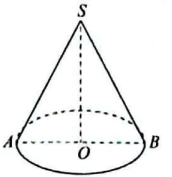
3．已知函数，则“在区间上单调递增”的一个充分不必要条件为（ ）

A． B． C． D．

4．老张为锻炼身体，增强体质，计划从下个月1号开始慢跑，第一天跑步3公里，以后每天跑步比前一天增加的距离相同．若老张打算用20天跑完98公里，则预计这20天中老张日跑步量超过5公里的天数为（ ）

A．8 B．9 C．13 D．14

5．如图①所示，圆锥绣球是虎耳草科绣球属植物，在中国主要分布于西北、华东、华南、西南等地区，抗虫害能力强，其花序硕大，类似于圆锥形，因此得名．现将某圆锥绣球近似看作如图②所示的圆锥模型，已知，直线与圆锥底面所成角的余弦值为，则该圆锥的侧面积为（ ）



① ②

A． B． C． D．

6．将函数的图像向右平移个单位长度后得到函数的图像，若函数在区间上单调递增，则的最大值为（ ）

A． B． C．1 D．3

7．已知直线与圆，过直线上的任意一点作圆的切线，切点分别为，则的最大值为（ ）

A． B． C． D．1

8．已知在正方体中，，点分别在棱和上，且，，，记平面与侧面，底面的交线分别为，则（ ）

A．的长度为 B．的长度为 C．的长度为 D．的长度为

**二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．**

9．已知正项等比数列的公比为，前项和为，，，则（ ）

A． B． C．数列是递减数列 D．

10．已知函数，则（ ）

A．为奇函数

B．的单调递增区间为

C．的极小值为

D．若关于的方程恰有3个不等的实根，则的取值范围为

11．已知正数满足，则（ ）

A． B． C． D．

12．已知椭圆的左、右焦点分别为，左、右顶点分别为，离心率为，点在上，则（ ）

A．若的面积为，则

B．若直线的斜率之积为，则

C．若，则以为直径的圆与无交点

D．若，则的最大值为

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．**

13．已知，，，若，则\_\_\_\_\_\_．

14．已知函数的定义域为，且的图像是一条连续不断的曲线，则同时满足下列三个条件的一个的解析式为\_\_\_\_\_\_．

①；②为奇函数；③在上单调递减．

15．已知在直三棱柱中，，，若直三棱柱存在内切球（与各面均相切）且该球的表面积为，则该直三棱柱的体积为\_\_\_\_\_\_．

16．已知抛物线的焦点为，直线过点且与交于两点，且，与的面积之比为，其中为坐标原点，则\_\_\_\_\_\_．

**四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

17．（10分）

已知数列满足，．

（1）求证：为等比数列；

（2）求数列的前项和．

18．（12分）

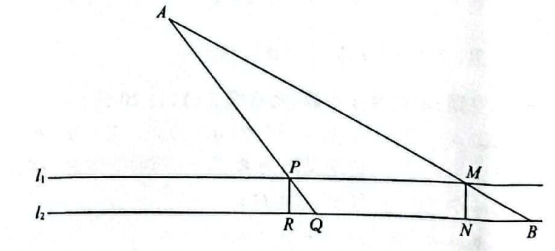
已知的内角所对的边分别为，且．

（1）求；

（2）若，求的最大值．

19．（12分）

如图，相距的之间是一条马路（可近似看作两条平行直线），为了测量河对岸一点到马路一侧的距离，小明在这一侧东边选择了一点，作为测量的初始位置，其中与交于点，现从点出发沿着向西走到达点，测得，继续向西走到达点，其中与交于点，继续向西走到达点，测得．根据上述测量数据，完成下列问题．

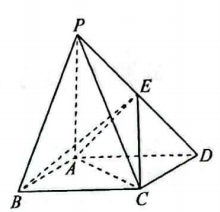


（1）求的值；

（2）求的值．

20．（12分）

如图，在四棱锥中，已知，底面是正方形，为棱的中点，，．



（1）求点到平面的距离；

（2）求平面与平面夹角的余弦值．

21．（12分）

已知双曲线的左、右顶点分别为，点在上，且．

（1）求的方程；

（2）直线与交于两点，记直线的斜率分别为，若，求的值．

22．（12分）

已知函数．

（1）当时，求的极值；

（2）若，求的值；

（3）求证：．

**参考答案及解析**

**一、选择题**

1．C 【解析】 由题意得，，故．故选C项．

2．A 【解析】 ，故，解得．故选A项．

3．D 【解析】 图像的对称轴为直线，若在区间上单调递增，则，解得，所以“”是“”的充分不必要条件．故选D项．

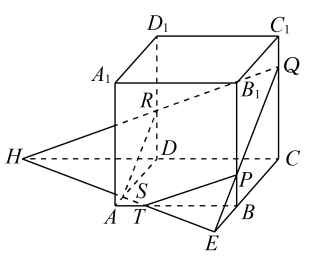
4．B 【解析】 由题意得这20天日跑步量为等差数列，记为，设公差为，则，解得，所以．由，得，所以，所以老张日跑步量超过5公里的天数为9天．故选B项．

5．C 【解析】 设，则由题意得，解得，所以底面圆周长，故该圆锥的侧面积．故选C项．

6．B 【解析】 因为的图像向右平移个单位长度后得到函数的图像，所以．当时，，因为函数在区间上单调递增，所以，解得，因此的最大值为．故选B项．

7．D 【解析】 设，由题意得为锐角，因为圆的半径，所以，，故当取最小值时，取最大值，显然当时，最小，且，此时，此时，也取得最大值，最大值为．故选D项．

8．A

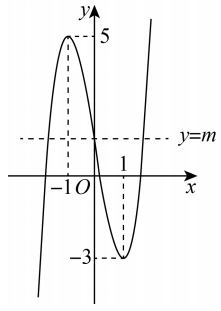


【解析】如图，连接并延长交的延长线于，连接并延长交于点，交的延长线于点，连接，交于点，连接，则即为，即为．由，得，所以，，由，得，所以，所以，故C，D项错误；由，得，又易知，所以，所以，所以，故A项正确，B项错误．故选A项．

**二、选择题**

9．AC 【解析】 由，得或（舍去），A项正确；因为，所以，B项错误；，随着的增大而减小，故是递减数列，C项正确；，D项错误．故选AC项．

10．ACD 【解析】 对于A项，，所以，故A项正确；对于B项，，令可得或，令可得，所以的单调递增区间为，故B项错误；对于C项，由，得，结合B项可知，是的极小值点，此时的极小值为，故C项正确；对于D项，令，得，如图，在同一直角坐标系内作出的图像与直线，当关于的方程恰有3个不等的实根时，，D项正确．故选ACD项．



11．BC 【解析】 对于A项，由已知得，所以（当且仅当时取等号），A项错误；对于B项，由已知得，所以（当且仅当时取等号），B项正确；对于C项，由已知得，所以，即，所以（当且仅当时取等号），C项正确，D项错误．故选BC项．

12．BCD 【解析】 由，得，所以，故A项错误；由题意得，所以，，故，故B项正确；若，则，，故C项正确；由，得，故D项正确．故选BCD项．

**三、填空题**

13．4 【解析】 依题意，，故，解得．

14．（答案不唯一） 【解析】 由题意得满足条件的一个的解析式为．

15． 【解析】 依题意设内切球的半径为，则，解得．设，则，由的内切圆半径为2，得，所以，故该直三棱柱的体积．

16．1 【解析】 由对称性，不妨设分别在第一、四象限，直线的方程为，联立整理得．设，，其中，则，，由与的面积之比为，可得，则，，则，得，则，解得．

**四、解答题**

17．（1）证明：由，

得，

又，

所以是以1为首项，2为公比的等比数列．

（2）解：由（1）知，故，

则．

设，，

两式相减得，

所以，

故．

18．解：（1）由正弦定理得，

因为，所以，

所以，

所以，

所以．

又，所以，

所以，即．

因为，所以．

（2）由正弦定理得



，其中为锐角，．

因为，所以，

所以的最大值为1，

故的最大值为．

19．解：（1）由图可知，，，，，

则，，，，

故．

（2）在中，由正弦定理得，

即，解得，

故．

20．解：解法一：（1）因为四边形为正方形，

所以，且，

所以，

所以，所以．

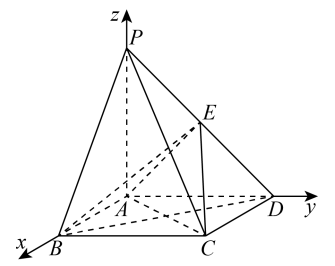
又，

所以平面，

因为平面，所以，

即两两垂直．

以为原点，所在直线分别为轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则，

所以．

设平面的法向量为，则

取，则，所以．

设点到平面的距离为，

则，即点到平面的距离为．

（2）连接，则．

由（1）得平面，平面，

所以，

又，所以平面，

即为平面的一个法向量．

设平面与平面的夹角为，

则，

即平面与平面夹角的余弦值为．

解法二：（1）因为四边形为正方形，

所以，且，

所以，

所以，所以．

又，，

所以平面，

因为平面，所以，

又，所以平面．

又平面，所以．

因为为的中点，所以，

又，所以平面．

又平面，所以．

易知，则，则．

因为为的中点，则到平面的距离为到平面距离的一半，即1，

设到平面的距离为，

由，得，

即，

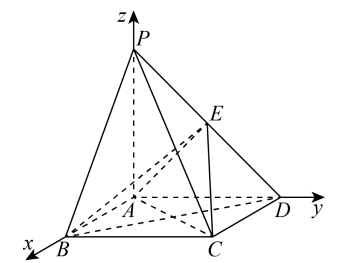
解得，

即点到平面的距离为．

（2）由（1）知，平面，

因为平面，所以，即两两垂直．

以为原点，所在直线分别为轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则，

所以．

设平面的法向量为，则

取，则，所以

连接，则．

因为平面，平面，所以，

又，所以平面，

即为平面的一个法向量．

设平面与平面的夹角为，

则，

即平面与平面夹角的余弦值为．

21．解：（1）由题意得，

又，解得或（舍），所以，

又点在上，所以，解得，

故的方程为．

（2）依题意，．

设，联立整理得，其中，，

则且，

，，所以，

又，则，

代入可得，

解得或（舍去）．

22．（1）解：当时，，

当时，单调递减，

当时，单调递增，

所以在处取得极小值0，无极大值．

（2）解：由题得．

①当时，，所以在上单调递增，

所以当时，与矛盾；

②当时，当时，单调递减，

当时，单调递增，

所以，

因为恒成立，所以．

记，则，

当时，单调递增，

当时，单调递减，

所以，所以，

又，所以，所以．

（3）证明：先证，

设，则，

所以在区间内单调递减，

所以，即，

所以．

再证，

由（2）知，当时等号成立．

令，则，

即，所以，

……

，

累加得，