**2023—2024学年第一学期10月六校联合调研试题**

**高三数学**

**2023.10**

**一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 已知集合，，则（ ）

A.  B. ∅ C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据指数函数值域和对数函数定义域求出集合*A*，*B*，然后由交集运算可得.

【详解】由指数函数性质可知，，

由得，所以，

所以.

故选：D

2. 设是等比数列，且，，则（ ）

A. 12 B. 24 C. 30 D. 32

【答案】D

【解析】

【分析】根据已知条件求得的值，再由可求得结果.

【详解】设等比数列的公比为，则，

，

因此，.

故选：D.

【点睛】本题主要考查等比数列基本量的计算，属于基础题．

3. 下列求导正确的是（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据基本函数的求导公式，及导数的运算法则和复合函数的求导法则，进行运算即可判断选项.

【详解】对于A，，故A错误；

对于B，根据复合函数的求导法则，

，故B错误；

对于C，，故C正确；

对于D，，故D错误.

故选：C.

4. 已知角终边上有一点，则是（ ）

A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

【答案】C

【解析】

【分析】根据所在象限可判断点*P*所在象限，然后根据对称性可得.

【详解】因为是第二象限角，所以，

所以点*P*在第四象限，即角为第四象限角，

所以为第一象限角，所以为第三象限角.

故选：C

5. 已知直线和圆交于两点，则的最小值为（ ）

A. 2 B.  C. 4 D. 

【答案】D

【解析】

【分析】求出直线过定点，再利用弦长公式即可得到最小值.

【详解】，令，则，所以直线过定点，

当得，则在圆内，则直线与圆必有两交点，

因为圆心到直线的距离，所以．

故选：D.

6. 已知样本数据，，，，，的平均数为16，方差为9，则另一组数据，，，，，，12的方差为（ ）．

A.  B.  C.  D. 7

【答案】C

【解析】

【分析】由均值、方差性质求数据，，，，，的平均数、方差，应用平均数、方差公式求新数据方差.

【详解】设数据，，，，，的平均数为，方差为，

由，，得，，

则，，，，，，12的平均数为，

方差为

．

故选：C

7. 已知定义在上的偶函数满足，则下列说法正确的是（ ）

A 

B. 函数的一个周期为2

C. 

D. 函数的图象关于直线对称

【答案】C

【解析】

【分析】根据已知等式判断函数的对称性，结合偶函数的性质判断函数的周期，最后逐一判断即可.

【详解】函数关于点中心对称，因此选项D不正确；

又因为函数为偶函数，所以，

由，

所以函数的周期为，所以选项B不正确；

因为函数是周期为的偶函数，

所以，因此选项A不正确；

在中，令，得，

因为函数的周期为，因此选项C正确，

故选：C

8. 已知点是抛物线上不同的两点，为抛物线的焦点，且满足，弦的中点到直线的距离记为，若不等式恒成立，则的取值范围（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】D

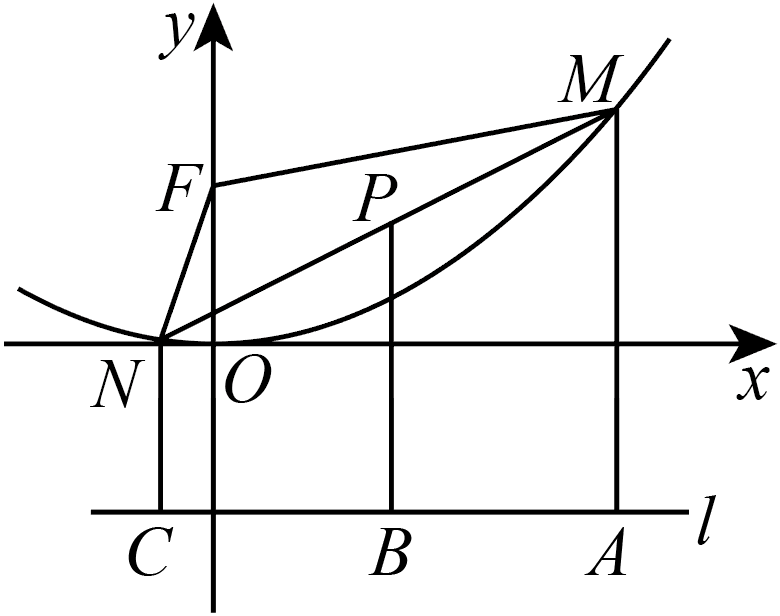
【解析】

【分析】令，利用余弦定理表示出弦的长，再利用抛物线定义结合梯形中位线定理表示出，然后利用均值不等式求解作答.

【详解】在中，令，由余弦定理得，

则有，

显然直线是抛物线的准线，过作直线的垂线，垂足分别为，如图，



而为弦的中点，为梯形的中位线，由抛物线定义知，，

因此，

当且仅当时取等号，又不等式恒成立，等价于恒成立，则，

所以的取值范围是.

故选：D

【点睛】方法点睛：圆锥曲线中最值或范围问题的常见解法：（1）几何法，若题目的条件和结论能明显体现几何特征和意义，则考虑利用几何法来解决；（2）代数法，若题目的条件和结论能体现某种明确的函数关系，则可首先建立目标函数，再求这个函数的最值或范围．

**二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分．请把正确选项在答题卡中的相应位置涂黑．**

9. 设复数满足，则下列说法错误的是（　　）

A. 为纯虚数 B. 的虚部为2i

C. 在复平面内，对应的点位于第二象限 D. ＝

【答案】ABC

【解析】

【分析】由复数的乘法和除法运算化简复数*z*，再对选项一一判断即可得出答案.

【详解】设复数，由得，

则，故A错误；

*z*的虚部为，故B错误；

复平面内，对应的点为，对应的点位于第三象限，故C错误；

，故D正确.

故选：ABC.

10 已知向量，，且，则（ ）

A.  B. 

C. 向量与向量的夹角是 D. 向量在向量上的投影向量坐标是

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据向量垂直的坐标公式求出向量判断A，利用向量模的坐标运算判断B，利用数量积的夹角坐标公式求解判断C，利用数量积的几何意义求解判断D.

【详解】因为向量，，所以，

由得，解得，所以，故A正确；

又，所以，故B错误；

设向量与向量的夹角为，因为，，

所以，又，所以，

即向量与向量的夹角是，故C正确；

向量在向量上的投影向量坐标是，故D正确.

故选：ACD.

11. 已知函数，下列说法正确的是（ ）

A. 函数的值域为

B. 若存在，使得对都有，则的最小值为

C. 若函数在区间上单调递增，则的取值范围为

D. 若函数在区间上恰有3个极值点和2个零点，则的取值范围为

【答案】ACD

【解析】

【分析】化简的解析式，根据三角函数的值域、最值、周期、单调性、极值点等知识对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】已知函数，可知其值域为，故选项A正确；

若存在，使得对都有，

所以的最小值为，故选项B错误；

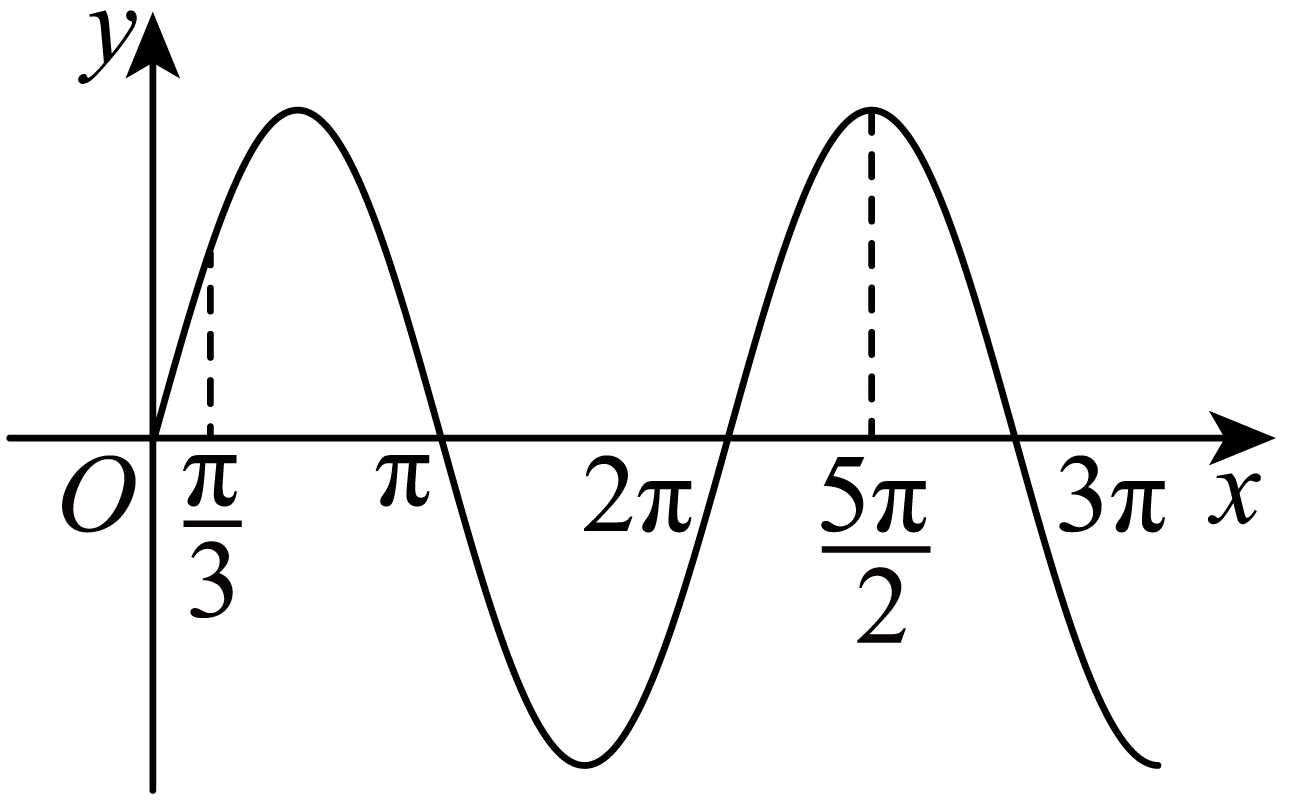
函数的单调递增区间为，

，

所以，令，则的取值范围为，故选项C正确；

若函数在区间上恰有3个极值点和2个零点，，

由如图可得：，



的取值范围为，故选项D正确；

故选：ACD

12. 已知函数，则下列说法正确的是（ ）

A. 当时，在上单调递增

B. 若的图象在处的切线与直线垂直，则实数

C. 当时，不存在极值

D. 当时，有且仅有两个零点，且

【答案】ABD

【解析】

【分析】对于A，利用导数即可判断；对于B，根据导数的几何意义可判断；对于C，取，根据导数判断此时函数的单调性，说明极值情况，即可判断；对于D，结合函数单调性，利用零点存在定理说明有且仅有两个零点，继而由可推出，即可证明结论，即可判断.

【详解】因为，定义域为且，

所以，

对于A，当时，，所以在和上单调递增，故A正确；

对于B，因为直线的斜率为，

又因为的图象在处的切线与直线垂直，

故令，解得，故B正确；

对于C，当时，不妨取，

则，

令，则有，解得，

当时，，在上单调递增；

当时，，在上分别单调递减；

所以此时函数有极值，故C错误；

对于D，由A可知，当时，在和上单调递增，

当时，，



，

所以在上有一个零点，

又因为当时， ，







，

所以在上有一个零点，

所以有两个零点，分别位于和内；

设，

令，则有，

则

，

所以的两根互为倒数，所以，故D正确．

故选：ABD

【点睛】难点点睛：本题综合考查了导数知识的应用，综合性较，解答的难点在于选项D的判断，要结合函数的单调性，利用零点存在定理判断零点个数，难就难在计算量较大并且计算复杂，证明时，要注意推出，进而证明结论

**三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．**

13. 在的展开式中，的系数为\_\_\_\_\_\_．

【答案】240

【解析】

【分析】利用二项展开式的通项公式即可.

【详解】在的展开式中，的系数为；

在的展开式中，的系数为；

所以在的展开式中，的系数为；

故答案为：240

14. 2023年杭州亚运会招募志愿者，现从某高校的6名志愿者中任意选出3名，分别担任语言服务、人员引导、应急救助工作，其中甲、乙2人不能担任语言服务工作，则不同的选法共有\_\_\_\_\_\_\_种.

【答案】80

【解析】

分析】应用排列组合知识及计数原理可得答案.

【详解】先从甲、乙之外的4人中选取1人担任语言服务工作，

再从剩下的5人中选取2人分别担任人员引导、应急救助工作，

则不同的选法共有种.

故答案为：80.

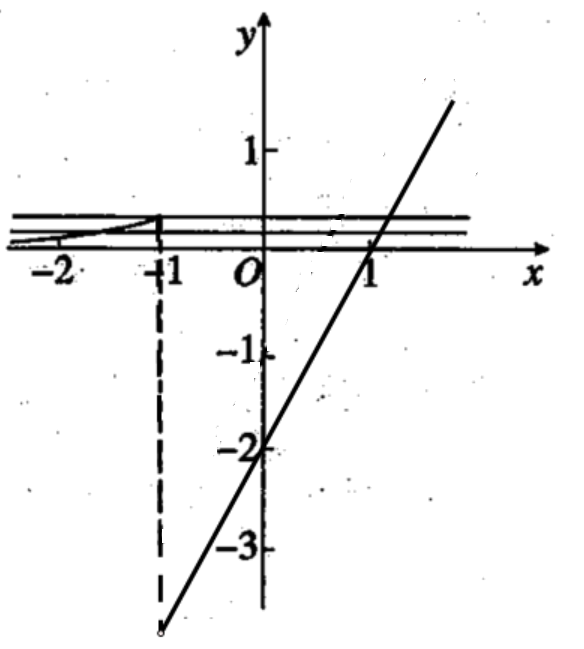
15. 已知，若，，则实数的取值范围是\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】作出函数图象，设，数形结合可知的范围，转化为关于的函数，利用导数求最值即可.

【详解】作函数图象，如图，



设，则，

，

又，

，

，

设，

当时，，函数为增函数，

，

即实数的取值范围是

故答案为：

16. 在正三棱锥中，底面的边长为4，*E*为*AD*的中点，，则以*D*为球心，*AD*为半径的球截该棱锥各面所得交线长为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】首先证明两两垂直，再求出所对应的圆心角，则计算出其弧长，即可得到交线长.

【详解】记*CD*中点为*F*，作平面*BCD*，垂足为*O*，

由正三棱锥性质可知，*O*为正三角形*BCD*的中心，所以*O*在*BF*上，

因为平面*BCD*，所以，

由正三角形性质可知，，

又，平面*ABO*，

所以平面*ABO*，

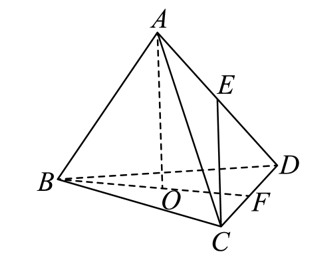
因为平面*ABO*，所以，

又平面*ACD*，

所以平面*ACD*，

因为平面*ACD*，所以

由正三棱锥性质可知，两两垂直，且，则，



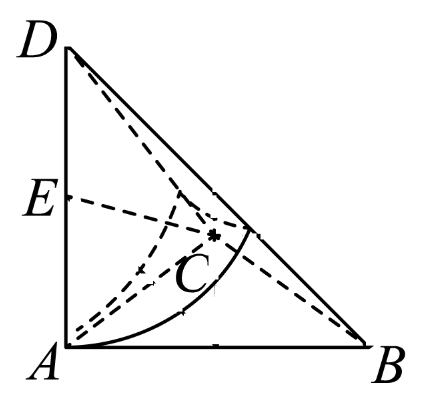
如图，易知以*D*为球心，*AD*为半径的球截该棱锥各面所得交线，是以*D*为圆心，*AD*为半径的三段圆弧，

则，，

则其圆心角分别为，

所以其交线长为，

故答案为：.



【点睛】关键点睛：本题的关键是利用线面垂直的判定与性质得到两两垂直，再求出所对应的三段弧长即可得到交线长.

**四、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

17. 已知等差数列的前项和为，且满足，．

（1）求数列的通项公式；

（2）若数列满足，求数列的前项和．

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）利用等差数的性质，结合通项公式与前项和公式即可得解；

（2）利用分组求和差，结合等差数列与等比数列的前项和公式即可得解.

【小问1详解】

（1）设数列等差数列的公差为*d*，

因为，所以，则，

因为，即，所以，

所以，，

所以，即 .

【小问2详解】

因为，所以，

所以





．

18. 已知函数,

（1）求函数的最值；

（2）设的内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，若，，且，求的面积．

【答案】（1）最大值为2，最小值为

（2）或

【解析】

【分析】(1)把化为“一角一函数”的形式：先用诱导公式把角化为，再用二倍角公式把二次项化为一次项，同时把角化为，最后用辅助角公式把函数名化为正弦，即可求出函数的最值；

(2)先求出角，由余弦定理得到关于的方程，再由正弦定理把已知的方程化简为含的方程，联立方程组即可解出的值，再代入三角形的面积公式即可.

【小问1详解】

因为



，

所以的最大值为2，最小值为．

【小问2详解】

结合(1)可知，所以．

因为，所以，

则．

由余弦定理得，

化简得①．

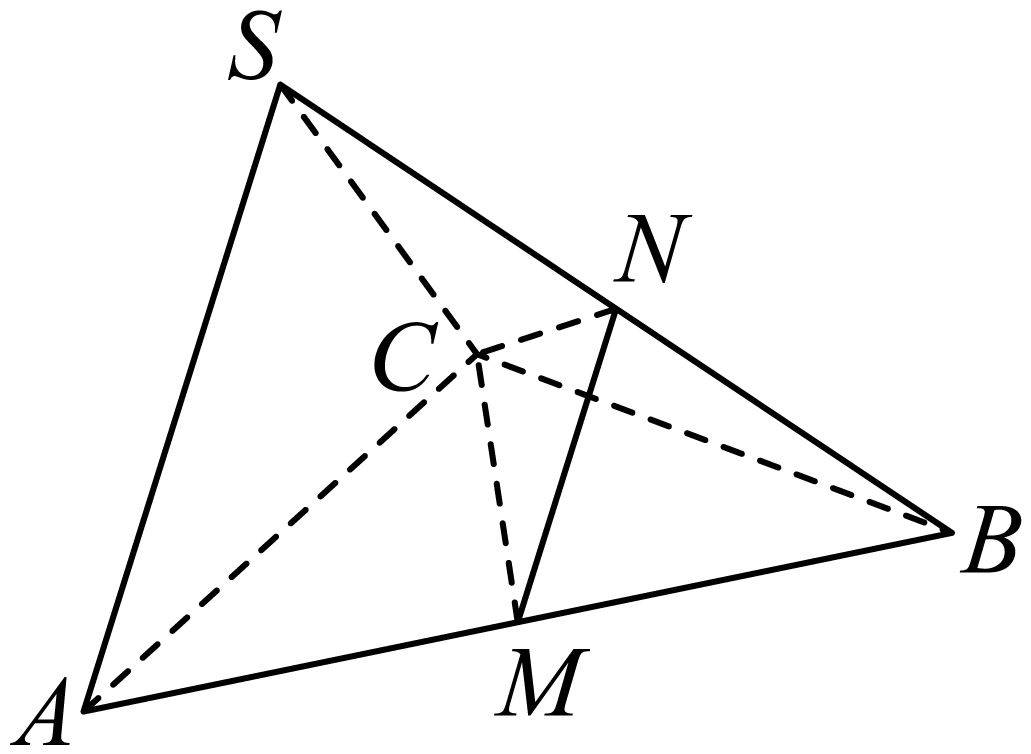
又，由正弦定理可得，即②．

结合①②得或．

时，；时，．

综上，的面积为或．

19. 在三棱锥中，△*ABC*是边长为4的正三角形，平面平面，，、分别为的中点．



（1）证明：；

（2）求二面角正弦值的大小.

【答案】（1）证明见解析

（2）

【解析】

【分析】（1）取*AC*得中点*O*，得，，可知平面，进而得结论；

（2）建立空间直角坐标系，求出平面*CMN*与平面的法向量，根据向量的夹角公式求解.

【小问1详解】

取*AC*得中点*O*，连接*SO*，*OB*，

，，，，

又*SO*，*BO*交于点*O*，平面，平面，

于是可知平面，

又平面，；

【小问2详解】

∵平面平面，平面平面，平面，，

∴平面，

以*OA*为*x*轴，*OB*为*y*轴，*OS*为*z*轴建立空间直角坐标系,

那么，

∴，

设为平面*CMN*的一个法向量，

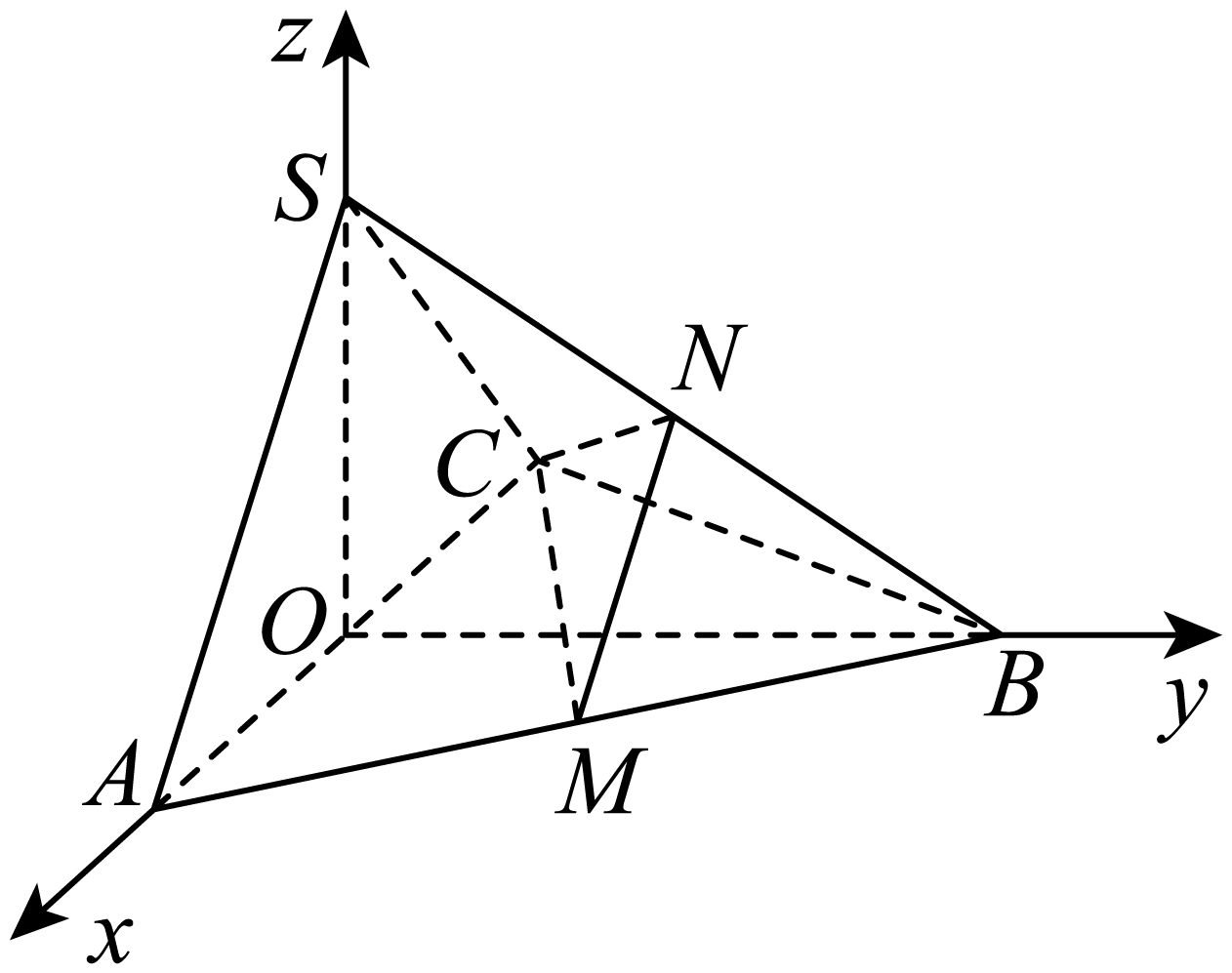
那么，取，那么，

∴，

又为平面一个法向量，

，，

即二面角的正弦值为.



20. 为了丰富在校学生的课余生活，某校举办了一次趣味运动会活动，学校设置项目*A*“毛毛虫旱地龙舟”和项目*B*“袋鼠接力跳”．甲、乙两班每班分成两组，每组参加一个项目，进行班级对抗赛．每一个比赛项目均采取五局三胜制（即有一方先胜3局即获胜，比赛结束），假设在项目*A*中甲班每一局获胜的概率为，在项目*B*中甲班每一局获胜的概率为，且每一局之间没有影响．

（1）求甲班在项目*A*中获胜的概率；

（2）设甲班获胜的项目个数为*X*，求*X*的分布列及数学期望．

【答案】（1）

（2）分布列见解析，

【解析】

【分析】（1）记“甲班在项目*A*中获胜”为事件*A*，利用独立事件的乘法公式求解即可；

（2）先算出“甲班在项目*B*中获胜”的概率，然后利用独立事件的乘法公式得到*X*的分布列，即可算出期望

【小问1详解】

记“甲班在项目*A*中获胜”为事件*A*，

则，

所以甲班在项目*A*中获胜的概率为

【小问2详解】

记“甲班在项目*B*中获胜”为事件*B*，

则，

*X*的可能取值为0，1，2，

则，

，

．

所以*X*的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 |
| *P* |  |  |  |

．

所以甲班获胜的项目个数的数学期望为

21. 已知函数

（1）讨论函数的单调性；

（2）设.如果对任意，，求的取值范围．

【答案】（1）当*a*≥0时，＞0，故*f*(*x*)在(0，+)单调增加；当*a*≤－1时，＜0， 故*f*(*x*)在(0，+)单调减少；当－1＜*a*＜0时，*f*(*x*)在（0，）单调增加，在（，+）

（2）*a*≤－2

【解析】

【详解】（1） *f*(*x*)的定义域为(0，+)，.

当*a*≥0时，＞0，故*f*(*x*)在(0，+)单调增加；

当*a*≤－1时，＜0， 故*f*(*x*)在(0，+)单调减少；

当－1＜*a*＜0时，令＝0，解得*x*=.当*x*∈(0，)时，＞0；

*x*∈(，+)时，＜0， 故*f*(*x*)在（0，）单调增加，在（，+）单调减少.

（2）不妨假设*x*1≥*x*2.由于*a*≤－2，故*f*(*x*)在（0，+）单调减少.

所以等价于

≥4*x*1－4*x*2，，即*f*(*x*2)+ 4*x*2≥*f*(*x*1)+ 4*x*1.

令*g*(*x*)=*f*(*x*)+4*x*，则+4＝.

于是≤＝≤0.

从而*g*(*x*)在（0，+）单调减少，故*g*(*x*1) ≤*g*(*x*2)，

即*f*(*x*1)+ 4*x*1≤*f*(*x*2)+ 4*x*2，故对任意*x*1，*x*2∈(0，+) ，

22. 已知双曲线过点，离心率.

（1）求双曲线的方程；

（2）过点的直线交双曲线于点，，直线，分别交直线于点，，求的值.

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）根据已知列关于*a*,*b*,*c*的方程组求解即可；

（2）直线联立双曲线方程，写出直线，的方程，然后可得点，坐标，将比值问题转化为纵坐标关系，利用韦达定理可得，然后可得.

【小问1详解】

由题知，解得，，，

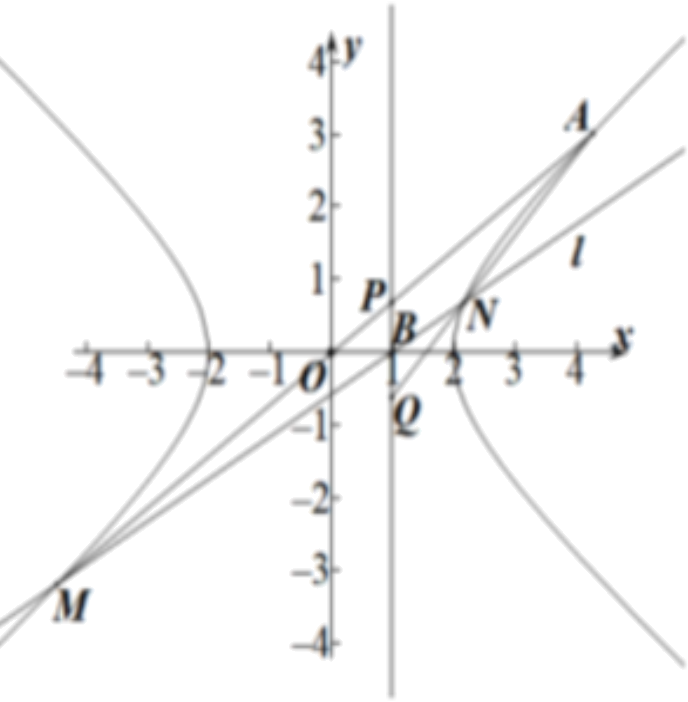
；

【小问2详解】

设直线，，

联立，则，

则，， ，



设直线，，

令，，，

则，

因为





所以，*B*为*PQ*的中点，所以.

【点睛】本题难点在于能将所求转化为证明的问题，可以通过取特殊方程求解，然后进行合理推测，或者尽量标准作图，通过图象进行猜测，从而确定求解方向.