**哈师大附中2021级高三第二次调研考试**

**数学试题**

**（满分150分，考试时间120分钟）**

**一、选择题（前8个小题为单选题，每题只有一个选项，每题5分，满分40分；后4小题为多选题，每题不只有一个选项，每题5分，满分20分）**

1. 已知集合，，则（ ）．

A.  B. 

C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次函数的值域与对数不等式的运算求解即可.

【详解】，.

故.

故选：D

2. 已知，那么的一个充分不必要条件是（ ）．

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据充分不必要条件定义，结合推出关系依次判断各个选项即可.

【详解】对于A，，，

是的一个充分不必要条件，A正确；

对于B，，，

是的一个既不充分也不必要条件，B错误；

对于C，，，

是的一个必要不充分条件，C错误；

对于D，，，

是的一个必要不充分条件，D错误.

故选：A.

3. （ ）．

A  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】利用诱导公式及特殊角的三角函数值计算即可.

【详解】

．

故选：B

4. 已知，，，则（ ）．

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】由幂函数、指数函数的单调性即可比较大小.

【详解】一方面因为幂函数在上单调递增，所以，

另一方面因为对数函数在上单调递减，所以，

结合以上两方面有：.

故选：D.

5. 若正数满足，则的最小值为（ ）．

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】由已知等式可得，利用基本不等式可求得结果.

【详解】为正数，，

（当且仅当，即，时取等号），

即的最小值为.  
故选：A.

6. 已知函数的定义域为，其导函数为，且，则下列关系一定正确的是（ ）．

A.  B. 

C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据可确定单调性，并得到；由反例可说明ACD错误；根据单调性可说明B正确.

【详解】，当时，；当时，；

在上单调递增，在上单调递减；

又在上可导，连续，；

对于A，若，满足在上单调递增，在上单调递减，

，，，

，A错误；

对于B，，，，B正确；

对于C，若，满足在上单调递增，在上单调递减，

，，，C错误；

对于D，若，满足在上单调递增，在上单调递减，

，，，

，，又，

，D错误.

故选：B.

7. 将函数图像上所有点的横坐标变为原来的2倍，纵坐标不变，得到函数，函数在区间上有且只有两个零点，则的取值范围为（ ）．

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】利用函数的伸缩变换及三角函数的性质即可求解.

【详解】由题意可知，，

因为，所以，

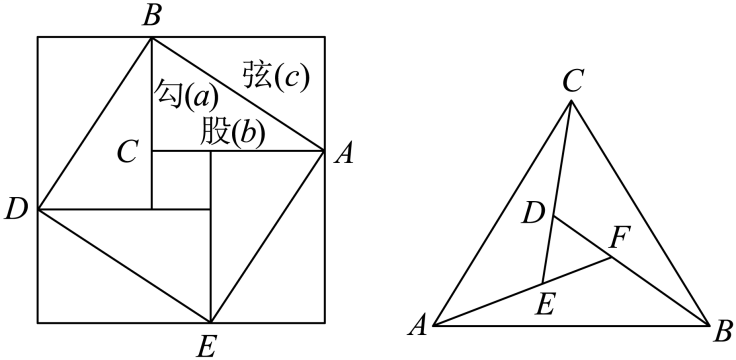
又因为函数在区间上有且只有两个零点，

所以，解得，

所以的取值范围为.

故选：C.

8. 我国古代数学家赵爽在《周髀算经》一书中利用“赵爽弦图”巧妙的证明了勾股定理，该图形是以弦为边长得到的正方形由个全等的直角三角形再加上中间的一个小正方形组成．类比“赵爽弦图”，可构造如图所示的图形，它是由个全等的三角形与中间一个小等边三角形拼成的一个较大的等边三角形，若，，则，则（ ）．



A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】利用向量的数乘、加减法运算可整理得到，化简整理可得的值，从而求得结果.

【详解】由知：，；

，

，，则，，

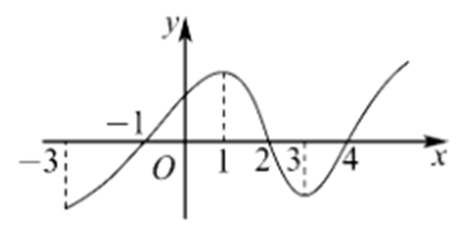
.

故选：A.

【点睛】思路点睛；本题考查平面向量基本定理的应用，解题的基本思路是能够利用向量的加减法和数乘运算，利用基底表示出所求向量或构造出关于所求向量的方程，从而求得参数的值.

**多选题（共4个小题，每题不只有一个选项，每题5分，满分20分）**

9. 如图所示是的导数的图象，下列结论中正确的有（ ）．



A. 的单调递增区间是

B. 是的极小值点

C. 在区间上单调递减，在区间上单调递增

D. 是的极小值点

【答案】BC

【解析】

【分析】利用导数正负与函数的单调性的关系，结合函数的极值与极值点的定义即可求解.

【详解】由导函数的图象可知，当或时，；当或时，；

所以的单调递增区间为和，单调递减区间为和.故A错误，C正确；

所以或是取得极小值点；故B正确；

所以是取得极大值点；故D错误.

故选：BC.

10. 若，，，则下列结论正确的是（ ）．

A.  B. 

C.  D. 

【答案】BD

【解析】

【分析】通过反例可说明A错误；由基本不等式可得B正确；将代入CD选项中，将不等式左侧化为关于的二次函数，结合的范围和二次函数单调性可求得CD正误.

【详解】对于A，若，则，A错误；

对于B，（当且仅当时取等号），B正确；

对于C，，，，

，

在上单调递减，在上单调递增，

（当且仅当时取等号），C错误；

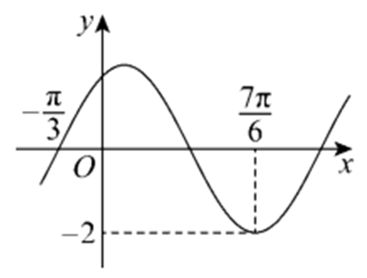
对于D，由C知：，

在上单调递减，在上单调递增，

，即，D正确.

故选：BD.

11. 函数的部分图象如图所示，下列说法正确的是（ ）．



A. 函数的周期是

B. 点是函数的图象的对称中心

C. 函数在上单调递减

D. 对于恒成立

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据图象可确定最小正周期和最小值，由此可得，利用可求得，由此可得；验证可知A错误；利用代入检验法可知BC正确；根据正弦型函数值域求法可知D正确.

【详解】由图象可知：若的最小正周期为，则，

，；

又，，，

，，解得：，

，，；

对于A，设，

则，

，不是的周期，A错误；

对于B，当时，，此时，

是图象对称中心，B正确；

对于C，当时，，

在上单调递减，在上单调递减，C正确；

对于D，当时，，

，D正确.

故选：BCD.

12. 已知定义在上的奇函数满足，当时，，定义符号函数，则下列结论正确的是（ ）．

A. 是奇函数 B. 

C.  D. 关于直线对称

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用奇偶性和对称性可推导得到是以为周期的周期函数，并确定的图象，结合图象可确定位于不同范围时，的正负；由奇偶性定义依次验证与的关系即可得到A正确；由周期性和符号函数的定义可求得B正确；通过反例可说明C错误；推导可得，由此可知D正确.

【详解】为奇函数，，图象关于原点对称；

，关于对称；

，，

是以为周期的周期函数，

结合当时，可得图象如下图所示，



当时，；当时，；

当时，；

对于A，若，，；，，，则；

若，，；

，，，则；

当时，，；

综上所述：为定义在上奇函数，A正确；

对于B，，，

，B正确；

对于C，当时，，

此时，C错误；

对于D，的周期为，，，

又为奇函数，，，

关于对称，，，

即，，

关于直线对称，D正确.  
故选：ABD.

【点睛】关键点点睛：本题考查函数中的新定义问题的求解，解题关键是能够利用抽象函数关系式，确定的对称性和周期性，从而结合函数图象来分析新定义函数的相关性质.

**二、填空题（共4个小题，每题5分，满分20分）**

13. 已知幂函数为非奇非偶函数，则实数\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】先由函数是幂函数求出的值，再对进行讨论即可.

【详解】由题意函数是幂函数，所以，

即，解得或，

当时，是偶函数，不满足题意，

当时，，其定义域为，不关于原点对称，

即是非奇非偶函数，满足题意.

故答案为：.

14. 函数在区间上是单调递增，则实数的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】结合复合函数单调性的判断方法和对数真数大于零可构造不等式组求得结果.

【详解】在上单调递减，

若在上单调递增，

则在上单调递减且在上恒成立，

，解得，

即实数的取值范围为.

故答案为：.

15. 已知向量，，，，与的夹角为，则的值最小时，实数*x*的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】利用向量的数量积的定义及向量的模公式，结合二次函数的性质即可求解.

【详解】因为，，与的夹角为，

所以.

所以,

当时，的值最小.

故答案为：.

16. 在中，，，当取最大值时，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】用正弦定理将转化求得最大值，根据用余弦定理联立方程组即可求解.

【详解】设，，，

，，

，

，

，

，

，

，其中，

，，，

当时取最大值，

，

，

，

，

即的值为.

**三、解答题（共6题，第17题10分，第18至第22题每题12分，共70分）**

17. 已知角的顶点与坐标原点重合，始边与轴的非负半轴重合，角的终边过点．

（1）求的值；

（2）若，，，求的值．

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）根据终边所过点可得，利用诱导公式和二倍角余弦公式可求得结果；

（2）根据角的范围和同角三角函数平方关系可求得，由，利用两角和差余弦公式可求得结果.

【小问1详解】

角的终边过点，，，

.

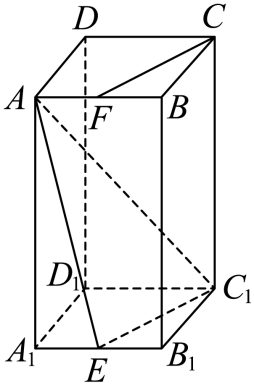
【小问2详解】

，，，；

，，，，

.

18. 已知正四棱柱中，，，为线段的中点，为线段的中点．



（1）求直线与平面所成角的正弦值；

（2）证明：直线平面并且求出直线到平面的距离．

【答案】（1）

（2）证明见解析，直线到平面的距离为

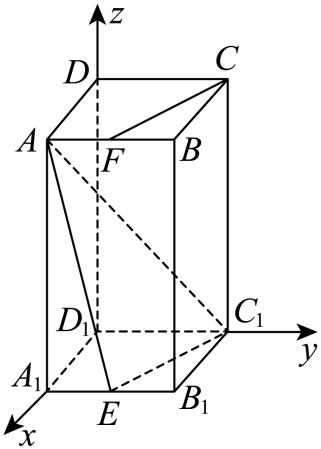
【解析】

【分析】（1）以为坐标原点建立空间直角坐标系，利用线面角的向量求法可求得结果；

（2）根据，由线面平行向量证明可得结论；将所求距离转化为点到平面的距离，由点面距离的向量求法可求得结果.

【小问1详解】

以为坐标原点，正方向为轴正方向，可建立如图所示空间直角坐标系，



则，，，，，

，，，

设平面的法向量，

则，令，解得：，，，

，

即直线与平面所成角的正弦值为.

【小问2详解】

由（1）知：，，，，

，，

又平面，平面，

直线到平面的距离即为点到平面的距离，设该距离为，

则，即直线到平面的距离为.

19. 已知数列为等差数列，且，．

（1）求的通项公式；

（2）数列满足，数列的前项和为，求证：．

【答案】（1）

（2）证明见解析

【解析】公众号：高中试卷君

【分析】（1）利用等差数列通项和求和公式可构造方程组求得，由此可得通项公式；

（2）由（1）可得，采用裂项相消法可求得，进而分析得到结论.

【小问1详解】

设等差数列的公差为，

则，解得：，

.

【小问2详解】

由（1）得：，

，

，.

20. 在中，角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，若．

（1）求角*A*的大小；

（2）若*D*为*BC*上一点，，，求的最小值．

【答案】（1）

（2）27

【解析】

【分析】（1）利用正弦定理化角为边，再根据余弦定理即可得解；

（2）根据求出的关系，再利用基本不等式即可得解.

【小问1详解】

因为，

由正弦定理得，即，

，

所以，

又，所以；

【小问2详解】

由，得，

因为，

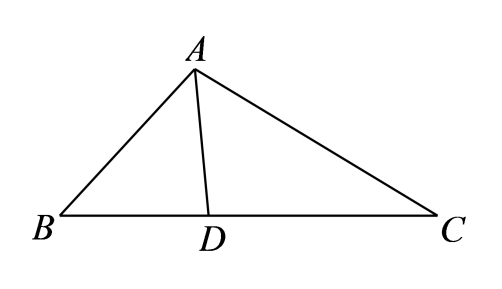
所以，

即，，

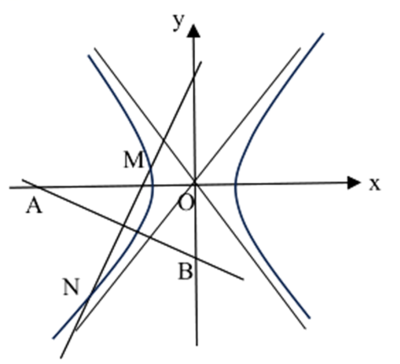
所以，

当且仅当，即时等号成立，

所以的最小值为．



21. 已知双曲线的渐近线为，点在*C*上，直线与双曲线*C*相交于两点*M*，*N*，线段的垂直平分线分别与*x*，*y*轴相交于*A*，*B*两点．



（1）若直线*l*过点，且点*M*，*N*都在双曲线的左支上，求*k*的取值范围；

（2）若（*O*为坐标原点）的面积为，且，求*k*的取值范围．

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）利用双曲线的渐近线及点在双曲线上，将直线与双曲线联立方程组，利用直线与双曲线相交的条件及韦达定理，结合点在双曲线的左支的条件即可求解；

（2）将直线与双曲线联立方程组，利用直线与双曲线相交的条件及韦达定理，再利用中点坐标公式及直线的点斜式方程，结合三角形的面积公式及一元二次不等式的解法可得答案.

【小问1详解】

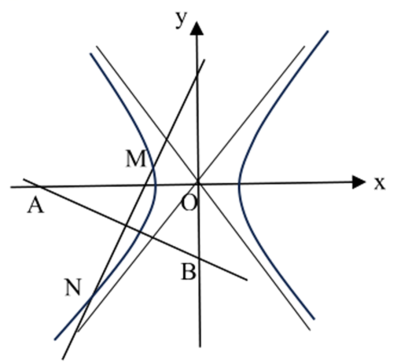
∵，且，

∴，，

故双曲线，

设，，

当直线*l*过点时，，直线*l*的方程为，如图所示



由，得，

由，，解得且，

，．

因为点*M*，*N*都在左支上，∴，，

∴，，所以．

所以*k*的取值范围为．

【小问2详解】

将代入并整理得，

由，，得，

，，

设线段*MN*的中点为，则，，

所以线段*MN*的垂直平分线的方程为，

所以*A*点的坐标为，*B*点的坐标为，

因为的面积为，所以，整理得，

所以，

所以，解得或，

所以*k*的取值范围为．

22. 已知函数．

（1）当时，求曲线在处的切线方程；

（2）当，若不等式恒成立，求的取值范围．

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）利用导数几何意义可求得切线斜率，结合可得切线方程；

（2）方法一：构造，将问题转化为恒成立；利用导数和零点存在定理可说明的单调性，得到；令，利用导数可得单调性，从而确定的范围，再次构造函数，利用导数可求得的范围，即为所求的的取值范围；

方法二：采用同构法，将恒成立的不等式化为，构造函数，利用导数求得单调性，从而得到，采用分离变量法可得，令，利用导数可求得，由此可得的取值范围；

方法三：由恒成立不等式可确定，构造函数，利用导数可求得的单调性，结合可求得的范围为；通过证明当时，恒成立和时，不等式不恒成立可得到最终范围.

【小问1详解】

当时，，则，

，又，

在处的切线方程为：，即.

【小问2详解】

方法一：令，则恒成立，

的定义域为，且；

令，则，

在上单调递增，即在上单调递增，

又，，

，使得，且当时，；当时，；

在上单调递减，在上单调递增，

，

由得：，，，

，

，即，

令，则在上单调递减，

又，，，

设，则，

在上单调递增，，，

又，的取值范围为.

方法二：由得：，

，

当时，在，时恒成立，；

当时，设，则，

，在上单调递增，

，即，，

令，则，

当时，；当时，；

在上单调递减，在上单调递增，，

，又，；

综上所述：实数的取值范围为.

方法三：定义域为，恒成立，必然成立；

令，则，

当时，；当时，；

在上单调递减，在上单调递增，

又，当时，，

当时，；

下面证明：当时，恒成立.

，，

，

令，则，

令，则，在上单调递增，

当时，，，

当时，；当时，；

在上单调递减，在上单调递增，，

恒成立，即恒成立；

当时，，，

，使得，且当时，；当时，；

在上单调递减，在上单调递增，，

由得：，，

，

，，，，

恒成立，即恒成立；

当时，，显然不满足恒成立；

综上所述：实数的取值范围为.

【点睛】方法点睛：本题重点考查了导数中的恒成立问题的求解；本题求解恒成立的基本方法有：

1.通过直接构造函数的方式，将问题转化为含参数函数的单调性的讨论和最值的求解问题，利用最值求得参数的取值范围；公众号：高中试卷君

2.采用同构法，将问题转化为同一函数的不同函数值的大小关系的问题，从而通过求解函数的单调性得到自变量的大小关系；

3.采用由特殊到一般的思路，通过特殊位置必然成立的思路得到的一个取值范围，再证明在此范围时不等式恒成立，并通过反例说明不在此范围时不等式不恒成立来得到最终范围.