**2022—2023衡水中学下学期高三年级五调考试**

**数 学**

**本试卷分第I卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。共4页，总分150分，考试时间120分钟。**

**第I卷（选择题 共60分）**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合**

 **题目要求的。**

1．已知集合，，则下列结论中正确的是

 A． B． C． D．

2．某企业为了解员工身体健康情况，采用分层随机抽样的方法从该企业的营销部门和研发部门抽取

 部分员工体检．已知该企业营销部门和研发部门的员工人数之比是4:1，且被抽到参加体检的员

 工中，营销部门的人数比研发部门的人数多72，则参加体检的人数是

 A． B． C． D．

3．已知，，在复平面上对应的点是一个正方形的三个顶点，则

 这个正方形的第四个顶点所对应的复数

 A． B． C． D．

4．在正方形中，分别是边上的点，，，则

 A． B． C． D．

5．李明开发的小程序发布经过天后，用户人数，其中为常数．已知小程序发布经

 过10天后有2 000名用户，则用户超过50 000名至少经过的天数为(取

 A．31 B．32 C．33 D．34

6．在棱长为4的正方体中，是的中点，动点在平面内（包括

 边界）．若平面，则的最小值是

 A． B． C． D．

7．若数列对任意正整数，有(其中，为常数且，则称数

 列是以为周期，以为周期公比的类周期性等比数列. 已知类周期性等比数列的前

 4项为1，1，2，3，周期为4，周期公比为3，则的前25项和为

 A．3 277 B．3 278 C．3 280 D．3 282

8．已知分别是双曲线的左、右焦点，过点作直线

 交于两点. 现将所在平面沿直线折成平面角为锐角的二面角，如图，翻折后

 两点的对应点分别为，且若

 ，则的离心率为

 A． B． C． D．

**二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。**

 **全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。**

9．设为正实数，则下列命题正确的是

 A．若，则 B．若，则

 C．若，则 D．若，，则

10．若的三个内角均小于，点满足则点到三

角形三个顶点的距离之和最小，点被人们称为费马点．根据以上性质，已知是平面内的任

意一个向量，向量满足，且，则的取值

可以是

 A． B． C． D．

11．“杨辉三角”是二项式系数在三角形中的一种几何排列，在中国南宋数学家杨辉1261年所著的《详解九章算法》一书中就有出现．如图所示，在“杨辉三角”中，除每行两边的数都是1外，其余每个数都是其“肩上”的两个数之和，例如第4行的6为第3行中两个3的和，则下列说法中正确的是

 A．

 B．在第2 022行中第1 011个数最大

 C．记“杨辉三角”第行的第个数为，则

 D．第34行中第15个数与第16个数之比为

12．已知函数，则

 A．是奇函数 B．的最大值大于

 C．， D．，

**第II卷（非选择题 共90分）**

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。**

13．设命题，. 若是假命题，则实数的取值范围是 .

14．已知抛物线的焦点为，准线为，是上的一点，点在上．若，

 且，则 .

15．已知函数在区间上有零点，则的最小值为 .

16．半正多面体亦称“阿基米德体”或“阿基米德多面体”，是以边数不全相同的

正多边形为面的多面体．某半正多面体由4个等边三角形和4个正六边形

构成，其可由正四面体切割而成，如图所示．已知，若在该半正

多面体内放一个球，则该球表面积的最大值为 .

**四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

17．（10分）

 已知数列满足，，且成等差数列．

 （1）求的通项公式；

 （2）若求数列的前项和.

18．（12分）

 如图，某城市有一条公路从正西方通过市中心后转向东偏北角方向的，位于该市

的某大学与市中心的距离km，且. 现要修筑一条铁路，在上设一站，在上设一站，铁路在部分为直线段，且经过大学，其中，，km．

 （1）求大学与站的距离；

 （2）求铁路段的长.

19．（12分）

 如图，三棱锥和三棱锥均为棱长为的正四面体，且四点共面，

记直线与的交点为

（1）证明：平面平面；

 （2）求二面角的正弦值．

20．（12分）

某校组织甲、乙、丙、丁、戊五位学生参加某大学的测试活动，现有A，B两种不同的测试方案，每位学生随机选择其中的一种方案进行测试．选择A方案测试合格的概率为，选择B方案测试合格的概率为，且每位学生测试的结果互不影响．

 （1）若甲、乙、丙三位学生选择A方案，丁、戊两位学生选择B方案，求恰有三位学生合格的概率；

 （2）若测试合格的人数的均值不小于3，试写出选择A方案进行测试的学生的人数．

21．（12分）

“工艺折纸”是一种把纸张折成各种不同形状物品的艺术活动，在我国源远流长．某些折纸活动

蕴含丰富的数学内容，例如：用一张圆形纸片，按如下步骤折纸（如图①）．

 步骤1：设圆心是，在圆内异于圆心处取一点，标记为；

 步骤2：把纸片折叠，使圆周正好通过点；

 步骤3：把纸片展开，并留下一道折痕；

 步骤4：不停地重复步骤2和3，就能得到越来越多的折痕（如图②）．

已知这些折痕所围成的图形是一个椭圆．若取半径为6的圆形纸片，设定点到圆心的距离

为4，按上述方法折纸. 以点所在的直线为轴，线段的中点为原点建立平面直角坐标系．

 （1）求折痕围成的椭圆的标准方程；

 （2）若过点且不与轴垂直的直线，与（1）中的椭圆交于两点，在轴的正半轴上是否存在定点，使得直线的斜率之积为定值？若存在，求出该定点和定值；若不存在，请说明理由．

22．（12分）

 已知函数

 （1）讨论的单调性；

（2）若不等式对任意恒成立，求实数的取值范围．

**数学参考答案**

**一、选择题**

1．D 2．C 3．B 4．D 5．D 6．C 7．A 8．C

**二、选择题**

9．AC 10．AB 11．AC 12．BCD

**三、填空题**

13． 14． 15． 16．

**四、解答题**

17．解：（1）因为

 所以

 又，所以

 即，所以是公比为的等比数列． （2分）

 又成等差数列，所以

 所以， 解得 （4分）

 所以 （5分）

 （2）由（1）可知，所以（6分）

 所以

 

 

 

  （10分）

18．解：（1）在中，，，且，，

 由余弦定理，得

 

 所以，所以大学与站的距离为km. （4分）

 （2）因为，且为锐角，所以在中，由正弦定理，

 得即，

 解得 （6分）

 由题意知为锐角，所以

 所以

 因为所以，

 所以 （8分）

 又所以

 在中，由正弦定理，得

 即，解得 （11分）

 所以铁路段的长为km. （12分）

19．（1）证明：如图，连接与的交点为，连接

 因为三棱锥和三棱锥均为棱长为的正四面体，

 所以，，，

 则，

 则，

 所以，

 所以 （2分）

 由题意知四边形是菱形，则

 因为，平面，

 所以

 又平面，所以平面平面 （4分）

 （2）解：过点作，交于点，则平面

 又三棱锥是正四面体，所以是的中心．

 在中，

 在中，

 又，所以，

 所以

 由（1）知两两垂直，故以为坐标原点，（6分）

 所在直线分别为轴，建立空间直角坐标系，如图所示，

 则，，，，

 故，

 设平面的法向量为，

 则，即令，

 则，，得平面的一个法向量为 （7分）

 设平面的法向量为，则，

 即令，

 则，，得平面的一个法向量为 （9分）

 设二面角的平面角为，

 则 （11分）

 所以

 故二面角的正弦值为 （12分）

20．解：（1）若选择A方案的三人全部合格，则所求概率

 若选择A方案的三人中有两人合格，则所求概率

 

 若选择A方案的三人中，只有一人合格，则所求概率

 所以恰有三位学生合格的概率 （6分）

 （2）设选择A方案测试的学生人数为

 则选择B方案测试的学生人数为并设通过A方案测试合格的学生人数为，

 通过B方案测试合格的学生人数为，

 当时，此时所有学生均选择B方案测试，则

 所以，不符合题意；

 当时，此时所有学生均选择A方案测试，则

 所以，符合题意； （9分）

 当时，，

 所以 （10分）

 又，

 则，故当时，符合题意．（11分）

 综上，当选择A方案测试的学生人数为时，测试合格的人数的均值不小于3． （12分）

21．解：（1）设为椭圆上一点，由题意知

 所以点的轨迹是以为焦点，长轴长的椭圆， （2分）

 所以，，则

 所以椭圆的标准方程为 （4分）

 （2）由题意，设的方程为，，

 联立得

 则， （7分）

 

 将式代入上式，

 可得 （9分）

 要使为定值，则，

 即 又，所以，此时 （11分）

 所以存在点，使得直线与的斜率之积为定值 （12分）

22．解：（1），则

 当时，令，解得，

 令，解得，

 所以在区间上单调递减，在区间上单调递增；（2分）

 当时，令，解得； 令，解得；

 所以在区间上单调递减，在区间上单调递增． （4分）

 综上，在区间上单调递减，在区间上单调递增． （5分）

 （2）由题意得对任意恒成立，

 令

 则

 若，当时， （6分）

 令，则

 所以在区间上单调递增，且，

 即，令，

 则，所以在区间上单调递增，且

 即，所以当时，，

 则，，

 所以在区间上单调递增，且，

 即恒成立． （9分）

 当时，，存在实数，使得，均有，

 则在区间上单调递减，且，不符合题意． （11分）

 综上，实数的取值范围是 （12分）