******2023CEE-02**

**数学**

**重 庆 缙 云 教 育 联 盟**

**2023年高考第二次诊断性检测**

**数学试卷**

考生须知：

1.答题前，考生务必用黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、座位号在答题卡上填写清楚；

2.每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，在试卷上作答无效；

3.考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回；

4.全卷共6页，满分150分，考试时间120分钟。

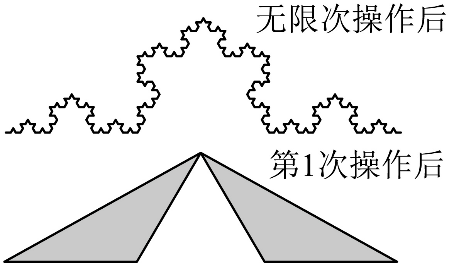
一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设、、、、是均含有个元素的集合，且，，记，则中元素个数的最小值是（    ）

A． B． C． D．

2．任给，对应关系使方程的解与对应，则是函数的一个充分条件是（    ）

A． B． C． D．

3．将一个顶角为120°的等腰三角形（含边界和内部）的底边三等分，挖去由两个等分点和上顶点构成的等边三角形，得到与原三角形相似的两个全等三角形，再对余下的所有三角形重复这一操作．如果这个操作过程无限继续下去…，最后挖剩下的就是一条“雪花”状的Koch曲线，如图所示已知最初等腰三角形的面积为1，则经过4次操作之后所得图形的面积是（    ）

A． B． C． D．

4．设*m*，，曲线*C*：，则下列说法正确的为（    ）

A．曲线*C*表示双曲线的概率为 B．曲线*C*表示椭圆的概率为

C．曲线*C*表示圆的概率为 D．曲线*C*表示两条直线的概率为

5．数列满足，，现求得的通项公式为，，若表示不超过的最大整数，则的值为（    ）

A．43 B．44 C．45 D．46

6．等额分付资本回收是指起初投资*P，*在利率*i*，回收周期数*n*为定值的情况下，每期期末取出的资金*A*为多少时，才能在第*n*期期末把全部本利取出，即全部本利回收，其计算公式为：.某农业种植公司投资33万元购买一大型农机设备，期望投资收益年利率为10%，若每年年底回笼资金8.25万元，则该公司将至少在（    ）年内能全部收回本利和.（，，）

A．4 B．5 C．6 D．7

7．已知向量的夹角为60°，，若对任意的、，且，，则的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

8．设实数，e为自然对数的底数，若，则（    ）

A． B． C． D．

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求的。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得2分。

9．下列关于复数的四个命题正确的是（    ）

A．若，则

B．若，则的共轭复数的虚部为1

C．若，则的最大值为3

D．若复数，满足，，，则

10．设是定义域为的奇函数，且的图象关于直线对称，若时，，则（    ）

A．为偶函数

B．在上单调递减

C．在区间上有4046个零点

D．

11．“端午节”为中国国家法定节假日之一，已被列入世界非物质文化遗产名录，吃粽子便是端午节食俗之一．全国各地的粽子包法各有不同．如图，粽子可包成棱长为的正四面体状的三角粽，也可做成底面半径为，高为（不含外壳）的圆柱状竹筒粽．现有两碗馅料，若一个碗的容积等于半径为的半球的体积，则（    ）（参考数据：）

A．这两碗馅料最多可包三角粽35个 B．这两碗馅料最多可包三角粽36个

C．这两碗馅料最多可包竹筒粽21个 D．这两碗馅料最多可包竹筒粽20个

12．设，当时，规定，如，．则（    ）

A．

B．

C．设函数的值域为*M*，则*M*的子集个数为32

D．

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．用0~9十个数字排成三位数，允许数字重复，把个位､十位､百位的数字之和等于9的三位数称为“长久数”，则“长久数”一共有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_个．

14．椭圆是特别重要的一类圆锥曲线，是平面解析几何的核心，它集中地体现了解析几何的基本思想.而黄金椭圆是一条优美曲线，生活中许多椭圆形的物品，都是黄金椭圆，它完美绝伦，深受人们的喜爱.黄金椭圆具有以下性质：①以长轴与短轴的四个顶点构成的菱形内切圆经过两个焦点，②长轴长，短轴长，焦距依次组成等比数列.根据以上信息，黄金椭圆的离心率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

15．已知对任意的实数*a*均有成立，则函数的解析式为\_\_\_\_\_\_\_\_．

16．将横坐标与纵坐标均为整数的点称为格点.已知，将约束条件表示的平面区域内格点的个数记作，若，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．王先生今年初向银行申请个人住房贷款100万元购买住房，月利率为，按复利计算，并从贷款后的次月初开始还贷，分10年还清.银行给王先生提供了两种还贷方式：①等额本金：在还款期内把本金总额等分，每月偿还同等数额的本金和剩余本金在该月所产生的利息；②等额本息：在还款期内，每月偿还同等数额的贷款（包括本金和利息）.

(1)若王先生采取等额本金的还贷方式，已知第一个还贷月应还15000元，最后一个还贷月应还6500元，试计算王先生该笔贷款的总利息；

(2)若王先生采取等额本息的还贷方式.银行规定每月还贷额不得超过家庭月收入的一半，已知王先生家庭月收入为23000元，试判断王先生该笔贷款能否获批.（不考虑其他因素）参考数据，，

18．由个小正方形构成长方形网格有行和列.每次将一个小球放到一个小正方形内，放满为止，记为一轮.每次放白球的频率为，放红球的概率为*q*，.

(1)若，，记表示100轮放球试验中“每一列至少一个红球”的轮数，统计数据如表：

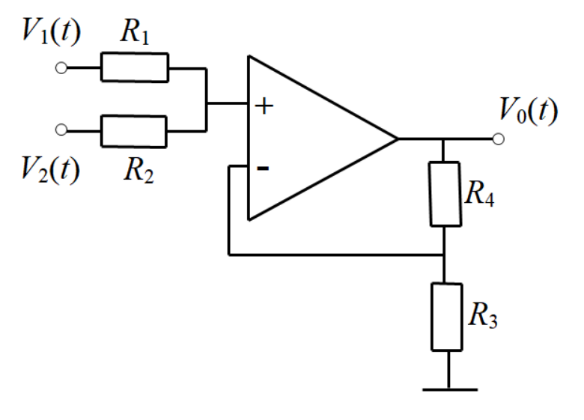
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *y* | 76 | 56 | 42 | 30 | 26 |

求*y*关于*n*的回归方程，并预测时，*y*的值；（精确到1）

(2)若，，，，记在每列都有白球的条件下，含红球的行数为随机变量，求的分布列和数学期望；

(3)求事件“不是每一列都至少一个红球”发生的概率，并证明：.

附：经验回归方程系数：，，，.

19．正弦信号是频率成分最为单一的信号，复杂的信号，例如电信号，都可以分解为许多频率不同、幅度不等的正弦型信号的叠加．正弦信号的波形可以用数学上的正弦型函数来描述：，其中表示正弦信号的瞬时大小电压*V*（单位：V）是关于时间*t*（单位：s）的函数，而表示正弦信号的幅度，是正弦信号的频率，相应的为正弦信号的周期，为正弦信号的初相．由于正弦信号是一种最简单的信号，所以在电路系统设计中，科学家和工程师们经常以正弦信号作为信号源（输入信号）去研究整个电路的工作机理．如图是一种典型的加法器电路图，图中的三角形图标是一个运算放大器，电路中有四个电阻，电阻值分别为，，，（单位：*Ω*）．

和是两个输入信号，表示的是输出信号，根据加法器的工作原理，与和的关系为：．

例如当，输入信号，时，输出信号：．

(1)若，输入信号，，则的最大值为？

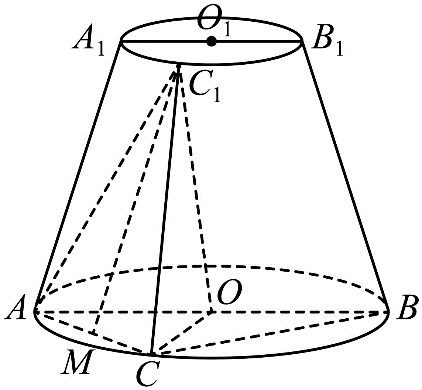
(2)已知，，，输入信号，．若（其中），则？

(3)已知，，，且，．若的最大值为，则满足条件的一组电阻值，分别是？

20．已知抛物线：的焦点为，准线与轴交于点*A．*

(1)过点的直线交于两点，且，求直线的方程；

(2)作直线相交于点，且直线的斜率与直线的斜率的差是，求点的轨迹方程，并说明方程表示什么形状的曲线.



21．如图，在圆台中，分别为上、下底面直径，且，，为异于的一条母线．

(1)若为的中点，证明：平面；

(2)若，求二面角的正弦值．

22．已知函数，．

(1)若不等式恒成立，求 的取值范围；

(2)若时，存在4个不同实数，，，，满足，证明：．

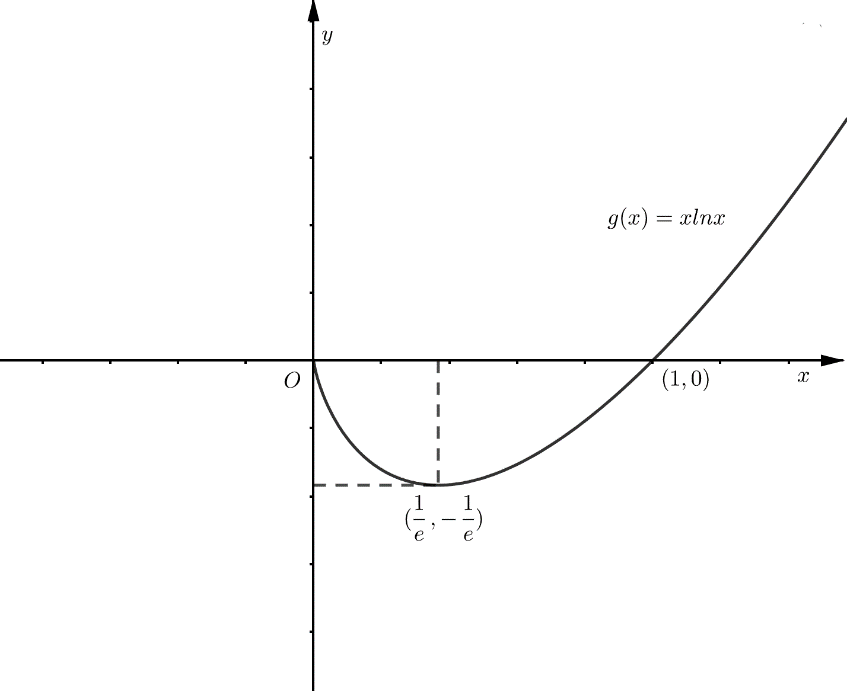
**重 庆 缙 云 教 育 联 盟**

**2023年高考第二次诊断性检测**

**数学参考答案及评分标准**

1-8 AAABDCAC

【7题解析】已知向量的夹角为60°，，则，所以，所以对任意的、，且，，则，所以，即，设，即在上单调递减，又时，，解得，所以，，在上单调递增；，，在上单调递减，所以.故选：A.

【8题解析】由，可得，两边同除得：，可设函数，，当时，，故单调递增，当时，，故单调递减，图像如上图所示，因为，，故由可得，所以，整理得得.

9.ACD 10.AB 11.AC 12.BCD

【11题解析】对于A中，例如，则，

可得，所以A错误；对于B中，由，所以，所以，所以，所以B正确；对于C中，因为，可得，当时，可得，即函数的值域为，所以集合的子集个数为，所以C正确；对于D中，设，若，可得，所以，，则，所以的周期为，又当时，可得，此时；，此时；

 ，此时；，此时，所以，结合周期为，即恒为，所以D正确.

【12题解析】结合特例，可判定A错误；结合，可判定B正确；结合正弦、余弦函数的值域，得到的值域为，可判定C正确；设，得到的周期为，证得恒为，可判定D正确.

13．45

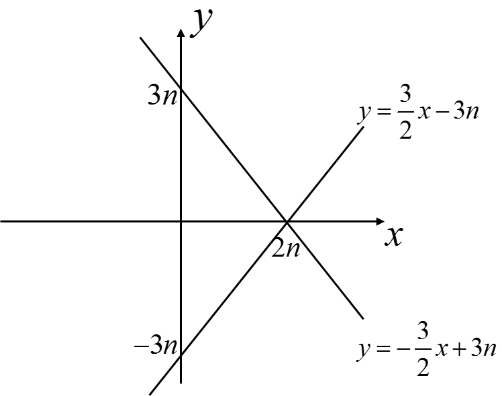
14．

15．

16. 

【15题解析】由，①得，即，②

得：，所以，令，则，所以.

【16题解析】作出的可行域，如图所示，该区域为一个等腰三角形，其中轴上的格点有个，轴上的格点有个，则坐标轴上的格点有个，在第一象限内，直线上的点，由格点的定义，设，则，故第一象限内，时，格点有个，设，则由可行域，已经格点的定义可知，第一象限内，时，格点有个，所以第一象限内的格点一共有，根据可行域的对称性可知，第四象限的格点数也为，故可行域内格点数 又∵，，即

17. （1）由题可知，等额本金还货方式中，每月的还贷额构成一个等差数列，表示数列的前项和.

则，故.

故王先生该笔贷款的总利息为：1290000-1000000=290000元.

（2）设王先生每月还货额为元，则有

，

即，

故.

因为，故王先生该笔贷款能够获批.

18. （1）由题意知 ,

故，

所以 ，

所以线性回归方程为： ，

所以，估计时，.

（2）由题意知：，，，，

则*X*的取值可能为，

记“含红球的行数为*k*”为事件，记“每列都有白球”为事件*B*，

所以 ，

，

，

所以*X*的分布列为：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |

所以数学期望为.

（3）证明：因为每一列至少一个红球的概率为 ,

记“不是每一列都至少一个红球”为事件*A*，所以，

记“每一行都至少一个白球”为事件*B*，所以，

显然， ，所以 ，

即，所以.

19. （1）由题意得，，则的最大值为；

（2）由题意知，，

整理得，

即，则，解得；

（3）由题意得，

，

又，则，当时，取得最大值，

则，整理得，即，解得，

又，则，取即满足题意，则（答案不唯一）.

20. （1）由题意，，当直线斜率不存在时，，，所以，不符合题意.当直线斜率存在时，设直线为，，，

联立，得，所以

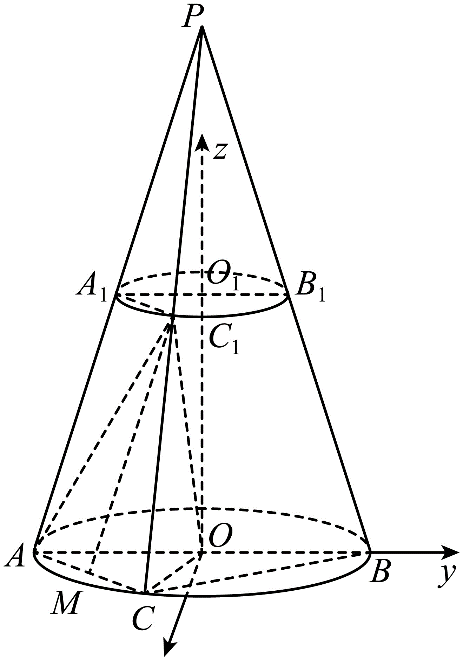
所以，解得，直线的方程为

（2）抛物线的准线为，与轴交于点

设点，由题意，则，

化简得，方程表示一条除去了两点的抛物线.

21. （1）如图，连接．因为在圆台中，上、下底面直径分别为，且，所以为圆台母线且交于一点*P*，所以四点共面.在圆台中，平面平面，由平面平面，平面平面，得.又，所以，所以，即为中点．在中，又*M*为的中点，所以．因为平面，平面，所以平面；

（2）以为坐标原点，分别为轴，过*O*且垂直于平面的直线为轴，建立如图所示的空间直角坐标系．因为，所以．则．因为，所以．所以，所以．设平面的法向量为，所以，所以，令，则，所以，又，设平面的法向量为，所以，所以，令，则，所以，所以．设二面角的大小为，则，所以．所以二面角的正弦值为.

.

22. （1）由题易知，，

①当，函数定义域为，

，不合题意，舍去；

②当，函数定义域为，由，解得，

当，，即在区间单调递增，

当，，即在区间单调递减，

，即，

设函数，，

，即在单调递增，

又因为，故时，成立，即成立，

故的取值范围是．

（2）当，，

设函数，，，

易知，，单调递增，

，，单调递减，

不妨令，

由，即，

又因为，，

故，即，

由函数单调性可知，方程至多有两解，

故不妨令，，两式相减得，

由，得，

故，问题得证．