

海淀区2022—2023学年第二学期期中练习

高三数学

参考答案

一、选择题

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	C	D	C	D	B	A	B	B

二、填空题

(11) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

(12) 2

(13) $\frac{\pi}{2}$ (答案不唯一, $\varphi \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$)

(14) 1; $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

(15) ①③

三、解答题共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16) (本小题13分)

解: (I) 由直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 可知 $BC \perp CC_1$, 又因为 $AC \perp BC$, 且 $AC \cap CC_1 = C$,

所以 $BC \perp$ 平面 CC_1A_1A .

由 $C_1D \subset$ 平面 CC_1A_1A , 所以 $BC \perp C_1D$.

在矩形 CC_1A_1A 中, $AD = DA_1 = 1, CC_1 = 2$, 所以 $DC_1 = \sqrt{2}, DC = \sqrt{2}$.

可得 $C_1C^2 = C_1D^2 + CD^2$, 所以 $C_1D \perp CD$.

又因为 $BC \cap CD = C$,

所以 $C_1D \perp$ 平面 BCD .

(II) 由题意可知, CA, CB, CC_1 两两垂直, 如图建立空间直角坐标系 $C-xyz$,

则 $C(0,0,0)$, $D(1,0,1)$, $B(0,1,0)$, $C_1(0,0,2)$,

$$\overrightarrow{BD} = (1, -1, 1), \quad \overrightarrow{BC_1} = (0, -1, 2), \quad \overrightarrow{CD} = (1, 0, 1).$$

设平面 BC_1D 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

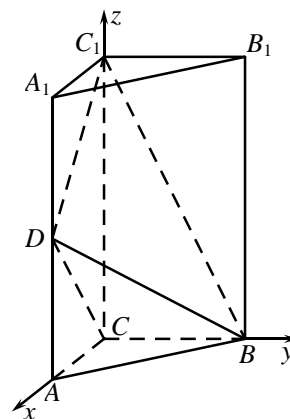
$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x - y + z = 0, \\ -y + 2z = 0. \end{cases}$$

令 $z = 1$, 则 $y = 2$, $x = 1$, 得 $\mathbf{n} = (1, 2, 1)$.

设直线 CD 与平面 BC_1D 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CD}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{CD}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以直线 CD 与平面 BC_1D 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(17) (本小题 14 分)

解: (I) 由 $b \sin 2A = \sqrt{3} a \sin B$ 及正弦定理, 得 $\sin B \sin 2A = \sqrt{3} \sin A \sin B$.

由倍角公式得 $2 \sin B \sin A \cos A = \sqrt{3} \sin A \sin B$.

在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A \neq 0, \sin B \neq 0$,

$$\text{得 } \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因为 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$\text{所以 } A = \frac{\pi}{6}.$$

(II) 记 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}$.

选条件②:

由 (I) 知 $A = \frac{\pi}{6}$, 又由题知 $S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{3}$,

$$\text{可得 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\text{得 } bc = 12\sqrt{3}.$$

又由条件②, 即 $\frac{b}{c} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, 解得 $b = 3\sqrt{3}, c = 4$.

由余弦定理, 得

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\
 &= 27 + 16 - 2 \times 3\sqrt{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

所以 $a = \sqrt{7}$.

选条件③:

又由条件③, 即 $\cos C = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 以及 $C \in (0, \pi)$, 可得 $\sin C = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

$$\text{所以 } \sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{21}}{7} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

由 (I) 知 $A = \frac{\pi}{6}$,

又由题知 $S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{3}$, 可得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A$.

得 $bc = 12\sqrt{3}$.

由正弦定理得 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 7 : 3\sqrt{21} : 4\sqrt{7}$.

可设 $a = 7k, b = 3\sqrt{21}k, c = 4\sqrt{7}k$.

由 $bc = 12\sqrt{3}$, 得 $k = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

得 $a = \sqrt{7}$.

(18) (本小题 14 分)

解: (I) 设该户网购生鲜蔬菜次数超过 20 次为事件 C , 在 A 组 10 户中超过 20 次的有 3 户, 由样本频率估计总体概率, 则 $P(C) = \frac{3}{10}$.

(II) 由样本频率估计总体概率, 一单元参与网购家庭随机抽取 1 户的网购生鲜蔬菜次数超过 20 次概率为 $\frac{3}{10}$, 二单元参与网购家庭随机抽取 1 户的网购生鲜蔬菜次数超过 20 次概率为 $\frac{7}{10}$.

X 的取值范围为 $\{0, 1, 2\}$.

$$P(X = 0) = (1 - \frac{3}{10}) \times (1 - \frac{7}{10}) = \frac{21}{100},$$

$$P(X = 1) = \frac{3}{10} \times (1 - \frac{7}{10}) + (1 - \frac{3}{10}) \times \frac{7}{10} = \frac{29}{50},$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{100}.$$

$$E(X) = 0 \times \frac{21}{100} + 1 \times \frac{29}{50} + 2 \times \frac{21}{100} = 1.$$

$$(III) D(\xi_1) = D(\xi_2).$$

19. (本小题 14 分)

解: (I) 依题意可得:

$$\begin{cases} 2b = 2, \\ 4\sqrt{a^2 + b^2} = 4\sqrt{6}. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \sqrt{5}, \\ b = 1. \end{cases}$$

椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$.

(II) 依题意, 可设直线 l 方程为 $y = kx + m (km \neq 0)$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

$$\text{联立方程} \begin{cases} \frac{x^2}{5} + y^2 = 1, \\ y = kx + m. \end{cases}$$

$$\text{得 } (5k^2 + 1)x^2 + 10kmx + 5m^2 - 5 = 0.$$

$$\Delta = (10km)^2 - 4 \cdot (5k^2 + 1)(5m^2 - 5) = 100k^2 - 20m^2 + 20 > 0, \text{ 即 } 5k^2 > m^2 - 1.$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{10km}{5k^2 + 1}, \quad x_1 x_2 = \frac{5m^2 - 5}{5k^2 + 1}.$$

在直线 l 方程 $y = kx + m$ 中, 令 $y = 0$, 得 $x = -\frac{m}{k}$, 得 $P(-\frac{m}{k}, 0)$.

依题意得 $M'(-x_1, y_1)$, 得直线 $M'N$ 方程为 $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 + x_1}(x + x_1) + y_1$.

令 $x = 0$, 得 $y_Q = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2}$.

$$\text{所以 } \triangle OPQ \text{ 的面积为 } S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} |x_P| \cdot |y_Q| = \frac{1}{2} \left| \frac{m}{k} \right| \cdot \left| \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2} \right|.$$

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = x_1(kx_2 + m) + x_2(kx_1 + m) = 2kx_1 x_2 + m(x_1 + x_2)$$

$$= 2k \cdot \frac{5m^2 - 5}{5k^2 + 1} - \frac{10km^2}{5k^2 + 1} = \frac{-10k}{5k^2 + 1}.$$

$$\text{即 } S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \left| \frac{m}{k} \right| \cdot \left| \frac{10k}{10km} \right| = 2, \text{ 解得 } k = \pm \frac{1}{4}, \text{ 经检验符合题意.}$$

所以 k 的值为 $\pm \frac{1}{4}$.

(20) (本小题 15 分)

解: (I) 当 $a=1$ 时, $f(x)=e^x-x$.

则 $f(0)=1$.

求导得 $f'(x)=e^x-1$,

得 $f'(0)=0$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$.

(II) 求导得 $f'(x)=ae^{ax}-1$.

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, 此时 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减.

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x)=0$, 解得 $x=-\frac{\ln a}{a}$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化情况如下:

x	$(-\infty, -\frac{\ln a}{a})$	$-\frac{\ln a}{a}$	$(-\frac{\ln a}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	极小值	\nearrow

由上表可知, $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty, -\frac{\ln a}{a})$, 增区间为 $(-\frac{\ln a}{a}, +\infty)$.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty, +\infty)$, 无增区间;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty, -\frac{\ln a}{a})$, 增区间为 $(-\frac{\ln a}{a}, +\infty)$.

(III) 将 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值记为 $f(x)_{\max}$, 最小值记为 $f(x)_{\min}$.

由题意, 若 $\exists x \in [-1, 1]$, 使得 $|f(x)| \geq 3$ 成立, 即 $f(x)_{\max} \geq 3$ 或 $f(x)_{\min} \leq -3$.

当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x)=e^{ax}-x > -x \geq -1$.

所以若 $\exists x \in [-1, 1]$, 使得 $|f(x)| \geq 3$ 成立, 只需 $f(x)_{\max} \geq 3$.

由 (II) 可知 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上单调或先减后增, 故 $f(x)_{\max}$ 为 $f(-1)$ 与 $f(1)$ 中的较大者,

所以只需当 $f(-1) \geq 3$ 或 $f(1) \geq 3$ 即可满足题意.

即 $f(-1)=e^{-a}+1 \geq 3$ 或 $f(1)=e^a-1 \geq 3$.

解得 $a \leq -\ln 2$ 或 $a \geq \ln 4$.

综上所述, a 的取值范围是 $(-\infty, -\ln 2] \cup [\ln 4, +\infty)$.

(21) (本小题 15 分)

解: (I) (i) 不满足. 令 $i=j=3$, $a_i a_j = 16$ 不是数列 $\{a_n\}$ 中的项.

(ii) 满足. 对于任意 $b_i, b_j (i \geq j)$, $b_i b_j = (2i-1)(2j-1) = 2(2ij-i-j+1) - 1$.

由于 $2ij-i-j+1 \geq 1$, 故令 $k=2ij-i-j+1$ 即可.

(II) (1) 对于有穷数列 $\{a_n\}$ 记其非零项中, 绝对值最大的一项为 a_p , 绝对值最小的一项为 a_q .

故令 $i=j=p$ 时, 存在一项 $|a_k| = |a_i a_j| = a_p^2$.

又 a_p 是数列 $\{a_n\}$ 非零项中绝对值最大的, 所以 $|a_p| \geq a_p^2$, 即 $0 < |a_p| \leq 1$.

再令 $i=j=q$ 时, 存在一项 $|a_k| = |a_i a_j| = a_q^2$.

又 a_q 是数列 $\{a_n\}$ 非零项中绝对值最小的, 所以 $|a_q| \leq a_q^2$, 即 $|a_q| \geq 1$.

又 $1 \leq |a_q| \leq |a_p| \leq 1$,

所以数列所有非零项的绝对值均为 1.

又数列 $\{a_n\}$ 的各项均不相等, 所以其至多有 0, -1, 1 共 3 项.

所以 $m \leq 3$.

(2) 构造数列 $\{a_n\}: 0, -1, 1$.

其任意两项乘积均为 0, -1, 1 之一, 满足性质①.

其连续三项满足 $0 - (-1) - 1 = 0$, 满足性质②.

又其各项均不相等, 所以该数列满足条件, 此时 $m=3$.

(3) 由 (1) (2), m 的最大值为 3.

(III) (1) 首先证明: 当 $a_1 > 0, a_2 < -1$ 时, 数列满足 $a_{2t-1} > 0, a_{2t} < 0$, 且 $|a_t| < |a_{t+2}|, t=1, 2, 3, \dots$. (*)

因为对于任意数列的连续三项 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} , 总有 $(a_n - a_{n+1} - a_{n+2})(a_n - \frac{1}{2}a_{n+1} - a_{n+2}) = 0$.

即 $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$ 或 $a_{n+2} = a_n - \frac{1}{2}a_{n+1}$. 不论是哪种情形, 均有

当 $a_n > 0 > a_{n+1}$ 时, $a_{n+2} \geq a_n - \frac{1}{2}a_{n+1} > a_n > 0$, 即 $|a_{n+2}| > |a_n|$.

当 $a_n < 0 < a_{n+1}$ 时, $a_{n+2} \leq a_n - \frac{1}{2}a_{n+1} < a_n < 0$, 亦有 $|a_{n+2}| > |a_n|$.

又 $a_1 > 0 > -1 > a_2$, 故性质 (*) 得证.

(2) 考虑 a_1, a_2, a_3 三项, 有 $a_3 = a_1 - a_2$ 或 $a_3 = a_1 - \frac{1}{2}a_2$.

若 $a_3 = a_1 - a_2$, 则 $a_1 = a_3 + a_2 < 1$, 此时令 $i=j=1$, 有 $a_1^2 < a_1$, 由性质 (*) 知不存在 k 使得

$a_k > 0$, 且 $a_k = a_1^2 < a_1$.

故只有 $a_3 = a_1 - \frac{1}{2}a_2$, 此时 $a_1 = a_3 + \frac{1}{2}a_2 < \frac{3}{2}$.

因为 $a_5 \geq a_3 - \frac{1}{2}a_4 \geq a_3 - \frac{1}{2}(a_2 - \frac{1}{2}a_3) > \frac{5}{4}a_3 = \frac{5}{2}$,

所以令 $i = j = 1$ 时, $a_1^2 < \frac{9}{4} < a_5$.

由性质 (*) 知, 只有 $a_1^2 = a_1$ 或 $a_1^2 = a_3$.

当 $a_1^2 = a_3$ 时, $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = 2(a_1 - a_3) = 2\sqrt{2} - 4$, 此时令 $i = 2, j = 1$, $a_2a_1 = 4 - 4\sqrt{2}$,

但 $a_4 \leq a_2 - \frac{1}{2}a_3 = 2\sqrt{2} - 5$, 即 $|a_4| > |a_2a_1|$, 由性质 (*) 知不存在 k 使得 $a_k = a_2a_1$.

所以 $a_1^2 = a_1$, 即 $a_1 = 1$, 从而 $a_2 = -2$.

(3) 经验证, 数列 $\{a_n\}$: $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, n \text{ 是奇数}, \\ -2^{\frac{n}{2}}, n \text{ 是偶数} \end{cases}$ 满足条件, 下面证这是唯一满足条件的数列.

假设 a_s 是第一个不满足上述通项公式的项, $s \geq 4$.

当 $s = 2t + 1, t \geq 2$ 时, 只能为 $a_{2t+1} = a_{2t-1} - a_{2t} = 2^{t-1} - (-2^t) = 3 \cdot 2^{t-1}$.

令 $i = 2t - 1, j = 3$, 则 $a_i a_j = 2^t$.

但 $a_{2t-1} < 2^t < a_{2t+1}$, 由性质 (*), 不存在 k 使得 $a_i a_j = a_k$.

当 $s = 2t, t \geq 2$ 时, 只能为 $a_{2t} = a_{2t-2} - \frac{1}{2}a_{2t-1} = -2^{t-1} - \frac{1}{2}2^{t-1} = -3 \cdot 2^{t-2} > -2^t$.

则 $a_{2t+2} \leq a_{2t} - \frac{1}{2}a_{2t+1} \leq a_{2t} - \frac{1}{2}(a_{2t-1} - \frac{1}{2}a_{2t}) = \frac{5}{4}a_{2t} - \frac{1}{2}a_{2t-1} = -\frac{19}{16} \cdot 2^t < -2^t$.

令 $i = 2t - 2, j = 3$, 则 $a_i a_j = -2^t$, 但 $a_{2t} > -2^t > a_{2t+2}$, 由性质 (*), 不存在 k 使得 $a_i a_j = a_k$.

故不存在不满足上述通项公式的项.

综上, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, n \text{ 是奇数}, \\ -2^{\frac{n}{2}}, n \text{ 是偶数}. \end{cases}$