**2023届普通高等学校招生全国统一考试**

**青桐鸣大联考（高三）**

**数学（理科）**

全卷满分150分，考试时间120分钟．

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知复数*z*满足，则（ ）

A．1 B． C．2 D．

2．已知集合，，则（ ）

A．*A* B．*B* C． D．

3．某研究所收集、整理数据后得到如下列表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *y* | 3 | 7 | 9 | 10 | 11 |

由两组数据可以得到线性回归方程为，则（ ）

A．1.7 B．1.8 C．1.9 D．2.0

4．已知，，，则这三个数的大小关系为（ ）

A． B． C． D．

5．已知数列满足，其前*n*项和为，若，则（ ）

A． B．0 C．2 D．4

6．已知函数若，则实数（ ）

A．0 B．1 C．2 D．3

7．已知第二象限角满足，则（ ）

A． B． C． D．

8．下列选项正确的是（ ）

A． B．

C．的最小值为 D．的最小值为

9．已知点*O*为所在平面内一点，在中，满足，，则点*O*为该三角形的（ ）

A．内心 B．外心 C．垂心 D．重心

10．已知正四棱柱中，，点*M*为的中点，若*P*为动点，且，则*P*点运动轨迹与该几何体表面相交的曲线长度为（ ）

A． B． C． D．

11．记的内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，，若外接圆的面积为，则面积的最大值为（ ）

A． B． C． D．

12．已知椭圆的左、右焦点分别为，，*P*为椭圆*C*在第一象限内的一点，，直线与*C*的另一个交点为*Q*，*O*为坐标原点，则的面积为（ ）

A． B． C． D．

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．已知双曲线的离心率为，则该双曲线的渐近线方程为\_\_\_\_\_\_．

14．已知，函数都满足，又，则\_\_\_\_\_\_．

15．已知函数的图象关于点中心对称，其最小正周期为*T*，且，则的值为\_\_\_\_\_\_．

16．已知函数，若不等式有且仅有1个整数解，则实数*a*的取值范围为\_\_\_\_\_\_．

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共60分．

17．（12分）

已知数列满足，，．

（1）求数列的通项公式；

（2）若数列，为的前*n*项和，求．

18．（12分）

我国某医药研究所在针对某种世界疾病难题的解决方案中提到了中医疗法，为证实此方法的效用，该研究所购进若干副某种中草药，现按照每副该中草药的重量大小（单位：克）分为4组：，，，，并绘制频率分布直方图如下所示：

（1）估计每副该中草药的平均重量（同一组中的数据用该区间的中点值作代表）；

（2）现从每副重量在，内的中草药中按照分层抽样的方式一共抽取6副该中草药，再从这6副中草药中随机取出2副进行分析，求取出的2副中仅有1副重量在中的概率．

19．（12分）

如图，在四棱锥中，底面四边形*ABCD*为矩形，，平面*ABCD*，*H*为*DC*的中点．

（1）求证：平面平面*POC*；

（2）已知二面角的平面角为，求．

20．（12分）

已知抛物线的焦点为*F*，点*E*在*C*上，以点*E*为圆心，为半径的圆的最小面积为．

（1）求抛物线*C*的标准方程；

（2）过点*F*的直线与*C*交于*M*，*N*两点，过点*M*，*N*分别作*C*的切线，，两切线交于点*P*，求点*P*的轨迹方程．

21．（12分）

已知函数．

（1）求曲线在处的切线在*x*轴上的截距；

（2）当时，证明：函数在上有两个不同的零点，，且当时，．

（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修4—4：坐标系与参数方程]（10分）

在平面直角坐标系*xOy*中，直线*l*过点，且倾斜角为，以坐标原点为极点，以*x*轴的非负半轴为极轴，建立极坐标系，曲线*C*的参数方程是为（参数）．

（1）求曲线*C*的普通方程和直线*l*的参数方程；

（2）已知曲线*C*与直线*l*相交于*A*，*B*两点，则的值．

23．[选修4—5：不等式选讲]（10分）

已知函数．

（1）求函数的最小值；

（2）设，，若的最小值为*m*，且，求的最大值．

**2023届普通高等学校招生全国统一考试**

**青桐鸣大联考（高三）答案**

**数学（理科）**

1．B　【解析】根据题意，设，所以，所以所以或所以复数或，所以．故选B．

2．A　【解析】根据题意，解得集合．由，得，所以，所以．故选A．

3．C　【解析】根据题意可得，，，由于样本中心点在回归直线上，所以，所以．故选C．

4．B　【解析】根据题意，，，，比较可得．故选B．

5．C　【解析】根据题意，可得数列为等差数列，，所以，所以，所以．故选C．

6．B　【解析】根据题意，当时，，不符合题意；

当时，，解得；

当时，，不符合题意；

当时，，不符合题意．故选B．

7．D　【解析】根据题意，第二象限角满足，可得，，所以，．

．故选D．

8．D　【解析】根据题意，当与为负数时，根据不等式可得

，选项A不正确；因为*x*不一定为正数，由A可知，选项B不正确；令，所以的最小值为3，选项C不正确；，因为，所以，选项D正确．故选D．

9．B　【解析】根据题意，，即，所以，可得向量在向量上的投影为的一半，可分析出点*O*在边*AB*的中垂线上，同理可得，点*O*在边*AC*的中垂线上，所以点*O*为该三角形的外心．故选B．

10．A　【解析】根据题意，分析可知点*P*的运动轨迹与几何体表面所交部分可看成2个半径为1的圆和2个半径为1的半圆，长度为．故选A．

11．B　【解析】由已知及正弦定理得，所以，

所以，又，所以．由的外接圆面积为，得外接圆的半径为1．由正弦定理得，所以，所以，解得，所以的面积，当且仅当时等号成立．故选B．

12．C　【解析】由题知，设，，则，由余弦定理得，即，所以，又，所以，所以，所以，所以，代入，得，所以直线，与联立得，则，所以，

所以．故选C．

l3．　【解析】根据题意，双曲线的离心率为，所以，所以，由，得，所以双曲线方程为，因此该双曲线的渐近线为．

14．　【解析】根据题意，，所以，，

，所以函数的周期为6，所以．

15．　【解析】根据题意，，因为图象关于点中心对称，分析可得，所以，所以，，所以，又因为最小正周期为，且，所以可得，则，所以的值为1．

16．　【解析】易知的定义域为，由有且仅有1个整数解得，不等式有且仅有1个整数解．设，则，

当时，，为增函数；

当时，，为减函数．

又，则当时，；当时，．

设，则直线恒过点，在同一直角坐标系中，作出函数与直线的图象，如图所示，

由图象可知，，

要使不等式有且仅有1个整数解，

则，解得，

故实数*a*的取值范围为．

17．解：（1）根据题意∵，∴，

∴，（2分）

则，，，…，，，（4分）

利用累乘法可得，，（5分）

∴．（6分）

（2）根据题意，（9分）

∴

．（12分）

18．解：（1）根据题意可得（克），

所以每副该中草药的平均重量约为32克．（6分）

（2）根据题意可得，按照分层抽样的方式，取出的6副该中草药中重量在中的有4副，重量在中的有2副，（8分）

所以所求概率为．（12分）

19．解：（1）证明：∵，*H*为*DC*中点，

∴，（1分）

∵平面*ABCD*，平面*ABCD*，

∴，（2分）

∵，平面*POC*，平面*POC*，

∴平面*POC*，（3分）

又∵平面*DPO*，

∴平面平面*POC*．（5分）

（2）以*O*为原点，*OB*，*OP*所在直线分别为*y*轴、*z*轴，作*x*轴平面*APB*，如图所示．

设，则，，

，，（6分）

，．（7分）

由（1）知，为平面*POC*的一个法向量，（8分）

设为平面*PBC*的法向量，则即

取，可得，（9分）

则．（10分）

解得，（11分）

又∵，∴，

∴．（12分）

20．解：（1）设点，，则，（1分）

因为以*E*为圆心，以为半径的圆的最小面积为，

所以，（2分）

所以，解得，（3分）

所以抛物线*C*的标准方程为．（4分）

（2）设，，

易得，由题意知直线*MN*的斜率一定存在，则设直线*MN*的方程为，

联立得，（5分）

，所以，．

由，得，则切线的斜率为，则切线的方程为，

即①．（8分）

同理可得切线的方程为②．（9分）

①②得，（10分）

代入①得，，（11分）

所以点*P*的轨迹方程为．（12分）

21．解：（1），（1分）

又，所以，（2分）

则曲线在处的切线方程为，（3分）

令得，，

故切线在*x*轴上的截距为．（4分）

（2）证明：要证函数在上有两个不同的零点，，只需证方程在上有两个不同的实数解，即证方程在上有两个不同的实数解，（5分）

设，则，

当时，；当时，，

所以在上单调递减，在上单调递增，（6分）

因为，，所以存在，使得；

又，，所以存在，使得，

故函数在上有两个不同的零点，．（7分）

由上易知，，，两式相加得，

两式相减得，，

则，（8分）

令，则，

所以，（10分）

设，

则，

所以在上单调递减，（11分）

则，

故当时，．（12分）

22．解：（1）根据题意，由得（1分）

即，（2分）

∴，∴曲线*C*的普通方程为；（3分）

由直线*l*过点，倾斜角为，

得直线*l*的参数方程为（*t*为参数）．（5分）

（2）根据题意，联立直线*l*的参数方程与曲线*C*的普通方程可得，，

化简得，（6分）

可得（8分）

则．（10分）

23．解：（1）依题意得（3分）

∴当时，可得函数取最小值3．（5分）

（2）由（1）可得，∴，（6分）

根据柯西不等式可得，（8分）

∴，∴，

当且仅当时等号成立，（9分）

∴的最大值为．（10分）