

2024 届普通高等学校招生全国统一考试

联考答案

数学(北师大版)

1.C 【解析】由题意得, $a+i=1+b+(b-1)i$, $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $\begin{cases} a=1+b, \\ 1=b-1, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} a=3, \\ b=2, \end{cases} \therefore a+b=5$. 故选 C.

2.B 【解析】平均数为 4 时, $m=9$, A 正确; 分别对 $m>5$, $m=5$, $m<5$ 三种情形分析可知 B 错误; 当 $m=1$ 时, 众数可以是 1, 故 C 正确; 设总体平均数为 a , 则 $s^2 = \frac{1}{5} [(1-a)^2 + (2-a)^2 + (3-a)^2 + (5-a)^2 + (m-a)^2] \geq \frac{1}{5} [(1-a)^2 + (2-a)^2 + (3-a)^2 + (5-a)^2] = \frac{1}{5} (4a^2 - 22a + 39)$, 故当且仅当 $a = m = \frac{11}{4}$ 时, s^2 取得最小值, D 正确.

故选 B.

3.C 【解析】由点 $(2, 3)$ 在直线 $l: ax+by+1=0$ 上得, $2a+3b+1=0$, 故点 (a, b) 一定在直线 $2x+3y+1=0$ 上. 故选 C.

4.B 【解析】根据点到直线的距离公式可得, 对于 A, 点 M、点 O 到直线 $x-y+\sqrt{2}=0$ 的距离为 $\frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1$, A 错误; 对于 B, 点 M 到直线 $x+y+\sqrt{2}=0$ 的距离为 $\frac{|\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 3$, B 正确; 对于 C, 点 M、点 O 到直线 $x+y-\sqrt{2}=0$ 的距离为 $\frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1$, C 错误; 对于 D, 点 M、点 O 到直线 $x-y-\sqrt{2}=0$ 的距离为 $\frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1$, D 错误.

故选 B.

5.B 【解析】由题意知 $x+ky-2-3k=0$ 可化为 $k(y-3)=-(x-2)$, 则直线恒过定点 $(2, 3)$, 验证选项得直线 l 的方程可以为 $2x-y-1=0$. 故选 B.

6.D 【解析】由题意直线方程可化为 $k(y-3)=-(x-2)$, 则直线恒过定点 $(2, 3)$, 此点不在圆内. 直线 $x+ky-2-3k=0$ 与圆 $x^2+y^2=r^2 (r>0)$ 相切,

故 $r^2 \leq 2^2 + 3^2 = 13$, 即 $r \leq \sqrt{13}$, 即当 $(2, 3)$ 为切点时, r 取最大值 $\sqrt{13}$. 故选 D.

7.C 【解析】由题意得直线的斜率一定存在, 设为 k , 则 $k=t^2-1 \in [-1, +\infty)$, 则 $k=\tan \theta \geq -1$,

故 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$.

故选 C.

8.A 【解析】由题意可知, $a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{m+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}}$,

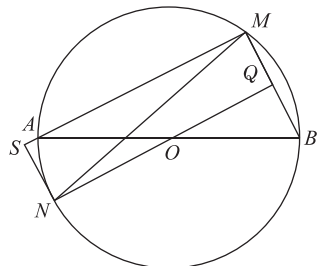
$b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{mn}}{2}}$, 因为 $0 < m < n < 1$, 由基本不等式得,

$\frac{m+n}{2} > \sqrt{mn}$, 则 $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{mn}}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, 即 $0 < a < b < 1$, 而 $c = \log_n m > \log_n n = 1$, 故 $a < b < c$. 故选 A.

9.C 【解析】若直线 l 的斜率不存在, 则 l 的方程为 $x=3$, 圆心 $(0, 2)$ 到 l 的距离为 3, 易求得弦长为 8, 符合题意; 若直线 l 的斜率存在, 设 l 的方程为 $y=k(x-3)$, 即 $kx-y-3k=0$, 故圆心 $(0, 2)$ 到 l 的距离 $d = \frac{|-2-3k|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{5^2-4^2} = 3$, 则 $k = \frac{5}{12}$, 则 l 的方程为 $5x-12y-15=0$. 综上, 直线 l 的方程为 $5x-12y-15=0$ 或 $x=3$.

故选 C.

10.D 【解析】取 MB 的中点为 Q , 连接 NQ , 作 $NS \perp MA$ 于点 S , 如图,



则 $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MB}$, 又 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MB} + m \overrightarrow{MA}$,

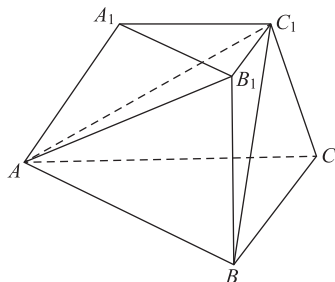
$\angle AMB = 90^\circ$, 故四边形 $MQNS$ 为矩形, 且 N, O ,

Q 三点共线, 故 $MS = NQ = ON + OQ = \frac{1}{2}AB +$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}MB = \frac{1}{2}AB + \frac{\sqrt{3}}{4}AB, \text{ 则 } m = \frac{MS}{MA} = \frac{\frac{1}{2}AB + \frac{\sqrt{3}}{4}AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}.$$

故选 D.

11.A 【解析】如图,



平面 ABC_1 、平面 AB_1C_1 将三棱台分为三部分, 设三棱台的高为 h , $S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_1$, $S_{\triangle ABC} = S$,

$$\text{故 } V_{A-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}S_1h, V_{C_1-ABC} = \frac{1}{3}Sh.$$

$$\text{由 } V_{ABC-A_1B_1C_1} = V_{A-A_1B_1C_1} + V_{C_1-ABC} + V_{ABB_1C_1}, \text{ 得}$$

$$\frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{SS_1}) = \frac{1}{3}hS + \frac{1}{3}hS_1 + V_{ABB_1C_1},$$

$$\text{故 } V_{ABB_1C_1} = \frac{1}{3}h\sqrt{SS_1} = \frac{2}{7} \times \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{SS_1}),$$

$$\text{故 } \sqrt{SS_1} = \frac{2}{7}(S + S_1 + \sqrt{SS_1}),$$

$$\text{故 } 2 \cdot \frac{S_1}{S} - 5\sqrt{\frac{S_1}{S}} + 2 = 0,$$

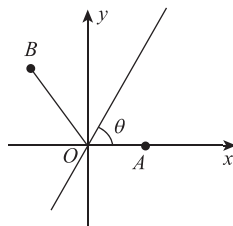
$$\text{由 } S_1 < S, \text{ 得 } \sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{2}.$$

故选 A.

12.B 【解析】对于①, $[f(n)]^2 = n+1-n$, 故 $f(n) = 1$, ①正确; 对于②, $S_n = \pi n$, 易知 $\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}$ 不是定值, ②错误; 对于③, 设两条切线的夹角为 θ , 则 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 故 $\frac{\theta}{2} = 45^\circ$, 即 $\theta = 90^\circ$, 故③正确; 对于④, $\sin \frac{30^\circ}{2} = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \sqrt{\frac{m}{n}}$, 故 $\frac{m}{n} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$, 故 $n(2-\sqrt{3}) = 4m$, 此方程显然对正整数 m, n 不成立, 故④错误, 故正确命题的个数是 2. 故选 B.

13.-2 【解析】由 $l_1 \parallel l_2$ 得, $a^2 = 4$, 则 $a = \pm 2$, 经检验 $a = 2$ 时, l_1, l_2 重合, 故 $a = -2$.

14. $y = 2x$ 【解析】由题意, 可设 $\angle AOB$ 的平分线的倾斜角为 θ , 如图,



$$\text{则 } \tan 2\theta = k_{OB} = -\frac{4}{3}, \text{ 即 } \frac{2\tan \theta}{1-\tan^2 \theta} = -\frac{4}{3}.$$

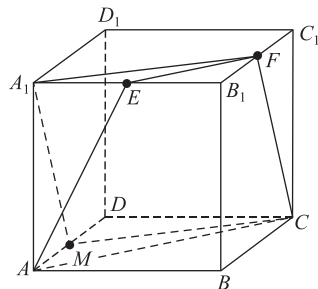
$$\text{则 } \tan \theta = 2 \text{ 或 } -\frac{1}{2}, \text{ 又 } 0 < 2\theta < \pi, \text{ 故 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{故 } k = \tan \theta = 2,$$

故 $\angle AOB$ 的平分线所在直线的方程为 $y = 2x$.

15. $2\sqrt{2}$ 【解析】由 $f(a \sin \theta) + f(b \cos \theta - 2) \geq 0$ 可得 $f(a \sin \theta) \geq -f(b \cos \theta - 2) = f(2 - b \cos \theta)$, 则根据函数在 \mathbf{R} 上单调递减可得 $a \sin \theta \leq 2 - b \cos \theta$, 则 $a \sin \theta + b \cos \theta \leq 2$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 化简得 $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(\theta + \varphi) \leq 2$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 其中 $\tan \varphi = \frac{b}{a}$, 故 $\sqrt{a^2 + b^2} \leq 2$, 而 $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{2}$, 则 $a + b \leq 2\sqrt{2}$, 则 $a + b$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

16. ③④ 【解析】根据题意, 连接 AE, CF, EF, AC, A_1F , 如图.



对于①, 易知 $EF \parallel AC$, 故 AE, CF 共面且相交, 故①错误; 对于②, 若过 AE 的平面与 CF 垂直, 则必有 $AE \perp CF$, 而 AE 与 CF 不垂直, 故②错误; 对于③, 取 AD 的中点为 M , 连接 CM, A_1M , 易证 $CM \parallel A_1F$, M 在平面 A_1FC 内, 故③正确; 对于④, AE 与 C_1D_1 所成的角即为 $\angle EAB$, $\cos \angle EAB =$

$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 故④正确. 故正确命题的序号为③④.

17. 解: (1) 由题意知, $f(x) = \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \right] \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}$,

令 $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 则 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$,

故函数 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right) (k \in \mathbf{Z})$.

(2) 由 $f(A) = \frac{1}{2} \sin\left(2A + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ 可得, $\sin\left(2A + \frac{\pi}{3}\right) = 0$,

故 $2A + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 则 $A = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$, 又

$A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 故取 $k=1$, 则 $A = \frac{\pi}{3}$,

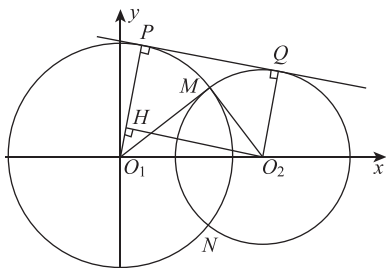
由余弦定理可知 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc$, 即 $bc \leq 3$,

当且仅当 $b=c=\sqrt{3}$ 时等号成立.

故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A \leq \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$,

则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

18. 解: (1) 如图,



由题意可知, O_1M 与圆 O_2 相切, O_2M 与圆 O_1 相切,

且 $MO_1 \perp MO_2$,

故 $|MO_1|^2 + |MO_2|^2 = 9$,

即 $r_1^2 + r_2^2 = 9$.

(2) 作 $O_2H \perp O_1P$ 于点 H , 连接 PQ ,

在 $\triangle O_1O_2H$ 中, $|O_2H|^2 = |O_1O_2|^2 - |O_1H|^2$,

其中 $|O_2H| = |PQ|$, $|O_1H| = |r_1 - r_2|$,

故 $|PQ|^2 = 9 - (r_1 - r_2)^2 = 9 - (r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) = 2r_1r_2$,

又 $2r_1r_2 \leq r_1^2 + r_2^2 = 9$,

当且仅当 $r_1 = r_2$ 时取等号,

故 $|PQ| \leq 3$,

即 $|PQ|$ 的最大值为 3.

19. 解: (1) 由题意得圆心 M 的坐标为 $(-1, 1)$,

又 $A(-2, 4)$, 故 $|AM|^2 = 10$,

因为切线长 3, 所以 $|AM|^2 - r^2 = 3^2$,

所以 $r=1$.

(2) 设 $Q(x_0, y_0)$, 则 $y_0 = \frac{1}{x_0}$,

故 $|MQ|^2 = (x_0 + 1)^2 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right)^2 = x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} +$

$2\left(x_0 - \frac{1}{x_0}\right) + 2 = \left(x_0 - \frac{1}{x_0}\right)^2 + 2\left(x_0 - \frac{1}{x_0}\right) + 4 =$

$\left(x_0 - \frac{1}{x_0} + 1\right)^2 + 3 \geq 3$,

当且仅当 $x_0 - \frac{1}{x_0} + 1 = 0$, 即 $x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时取等号,

故 $|MQ|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$,

故 $|PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{3} - 1$.

20. 解: (1) 设 $P(x_0, y_0)$, $Q(x, y)$, 则 $\begin{cases} x_0 + 1 = 2x, \\ y_0 = 2y, \end{cases}$

即 $\begin{cases} x_0 = 2x - 1, \\ y_0 = 2y, \end{cases}$

代入 $(x_0 + 1)^2 + y_0^2 = 36$ 整理得, $x^2 + y^2 = 9$,

故动点 Q 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 9$.

(2) 设 $S(x', y')$, 则 $\frac{\sqrt{(x'-1)^2 + y'^2}}{\sqrt{(x'-b)^2 + y'^2}} = k (k > 0)$,

整理得 $(1 - k^2)(x'^2 + y'^2) + 2(k^2b - 1)x' + 1 - b^2k^2 = 0$,

其中 $x'^2 + y'^2 = 9$,

故 $10 - 9k^2 - b^2k^2 + 2(k^2b - 1)x' = 0$,

当且仅当 $\begin{cases} 10 - 9k^2 - b^2k^2 = 0 (*) \\ k^2b - 1 = 0 (***) \end{cases}$ 时上式恒成立,

由 $(***)$ 式得 $k^2 = \frac{1}{b}$,

