三年专题19 坐标系与参数方程

1．【2022年全国甲卷】在直角坐标系$xOy$中，曲线$C\_{1}$的参数方程为$\left\{\begin{array}{c}x=\frac{2+t}{6}\\y=\sqrt{t}\end{array}\right $（*t*为参数），曲线$C\_{2}$的参数方程为$\left\{\begin{array}{c}x=−\frac{2+s}{6}\\y=−\sqrt{s}\end{array}\right $（*s*为参数）．

(1)写出$C\_{1}$的普通方程；

(2)以坐标原点为极点，*x*轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C\_{3}$的极坐标方程为$2cosθ−sinθ=0$，求$C\_{3}$与$C\_{1}$交点的直角坐标，及$C\_{3}$与$C\_{2}$交点的直角坐标．

【答案】(1)$y^{2}=6x−2\left(y\geq 0\right)$；

(2)$C\_{3},C\_{1}$的交点坐标为$\left(\frac{1}{2},1\right)$，$\left(1,2\right)$，$C\_{3},C\_{2}$的交点坐标为$\left(−\frac{1}{2},−1\right)$，$\left(−1,−2\right)$．

【解析】

【分析】

(1)消去$t$，即可得到$C\_{1}$的普通方程；

(2)将曲线$C\_{2},C\_{3}$的方程化成普通方程，联立求解即解出．

(1)

因为$x=\frac{2+t}{6}$，$y=\sqrt{t}$，所以$x=\frac{2+y^{2}}{6}$，即$C\_{1}$的普通方程为$y^{2}=6x−2\left(y\geq 0\right)$．

(2)

因为$x=−\frac{2+s}{6},y=−\sqrt{s}$，所以$6x=−2−y^{2}$，即$C\_{2}$的普通方程为$y^{2}=−6x−2\left(y\leq 0\right)$，

由$2cosθ−sinθ=0⇒2ρcosθ−ρsinθ=0$，即$C\_{3}$的普通方程为$2x−y=0$．

联立$\left\{\begin{array}{c}y^{2}=6x−2\left(y\geq 0\right)\\2x−y=0\end{array}\right $，解得：$\left\{\begin{array}{c}x=\frac{1}{2}\\y=1\end{array}\right $或$\left\{\begin{array}{c}x=1\\y=2\end{array}\right $，即交点坐标为$\left(\frac{1}{2},1\right)$，$\left(1,2\right)$；

联立$\left\{\begin{array}{c}y^{2}=−6x−2\left(y\leq 0\right)\\2x−y=0\end{array}\right $，解得：$\left\{\begin{array}{c}x=−\frac{1}{2}\\y=−1\end{array}\right $或$\left\{\begin{array}{c}x=−1\\y=−2\end{array}\right $，即交点坐标为$\left(−\frac{1}{2},−1\right)$，$\left(−1,−2\right)$．

2．【2022年全国乙卷】在直角坐标系$xOy$中，曲线*C*的参数方程为$\left\{\begin{array}{c}x=\sqrt{3}cos2t\\y=2sint\end{array}\right $，（*t*为参数），以坐标原点为极点，*x*轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线*l*的极坐标方程为$ρsin\left(θ+\frac{π}{3}\right)+m=0$．

(1)写出*l*的直角坐标方程；

(2)若*l*与*C*有公共点，求*m*的取值范围．

【答案】(1)$\sqrt{3}x+y+2m=0$

(2)$−\frac{19}{12}\leq m\leq \frac{5}{2}$

【解析】

【分析】

（1）根据极坐标与直角坐标的互化公式处理即可；

（2）联立*l*与*C*的方程，采用换元法处理，根据新设*a*的取值范围求解*m*的范围即可.

(1)

因为*l*：$ρsin\left(θ+\frac{π}{3}\right)+m=0$，所以$\frac{1}{2}ρ⋅sinθ+\frac{\sqrt{3}}{2}ρ⋅cosθ+m=0$，

又因为$ρ⋅sinθ=y,ρ⋅cosθ=x$，所以化简为$\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}x+m=0$，

整理得*l*的直角坐标方程：$\sqrt{3}x+y+2m=0$

(2)

联立*l*与*C*的方程，即将$x=\sqrt{3}cos2t$，$y=2sint$代入

$\sqrt{3}x+y+2m=0$中，可得$3cos2t+2sint+2m=0$，

所以$3(1−2sin^{2}t)+2sint+2m=0$，

化简为$−6sin^{2}t+2sint+3+2m=0$，

要使*l*与*C*有公共点，则$2m=6sin^{2}t−2sint−3$有解，

令$sint=a$，则$a\in \left[−1,1\right]$，令$f(a)=6a^{2}−2a−3$，$(−1\leq a\leq 1)$，

对称轴为$a=\frac{1}{6}$，开口向上，

所以$f(a)\_{max}=f(−1)=6+2−3=5$，

$f(a)\_{min}=f(\frac{1}{6})=\frac{1}{6}−\frac{2}{6}−3=−\frac{19}{6}$，

所以$−\frac{19}{6}\leq 2m\leq 5$

*m*的取值范围为$−\frac{19}{12}\leq m\leq \frac{5}{2}$.

3．【2021年甲卷文科】在直角坐标系中，以坐标原点为极点，*x*轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线*C*的极坐标方程为．

（1）将*C*的极坐标方程化为直角坐标方程；

（2）设点*A*的直角坐标为，*M*为*C*上的动点，点*P*满足，写出*Р*的轨迹的参数方程，并判断*C*与是否有公共点．

【答案】（1）；（2）*P*的轨迹的参数方程为（为参数），*C*与没有公共点.

【解析】

【分析】

（1）将曲线C的极坐标方程化为，将代入可得；

（2）方法一：设，设，根据向量关系即可求得*P*的轨迹的参数方程，求出两圆圆心距，和半径之差比较可得.

【详解】

（1）由曲线C的极坐标方程可得，

将代入可得，即，

即曲线*C*的直角坐标方程为；

（2）

[方法一]【最优解】

设，设

，

，

则，即，

故*P*的轨迹的参数方程为（为参数）

曲线*C*的圆心为，半径为，曲线的圆心为，半径为2，

则圆心距为，，两圆内含，

故曲线*C*与没有公共点.

[方法二]：

设点的直角坐标为，，，因为，

所以，，，

由，

即，

解得，

所以，，代入的方程得，

化简得点的轨迹方程是，表示圆心为，，半径为2的圆；

化为参数方程是，为参数；

计算，

所以圆与圆内含，没有公共点．

【整体点评】

本题第二问考查利用相关点法求动点的轨迹方程问题，

方法一：利用参数方程的方法，设出的参数坐标，再利用向量关系解出求解点的参数坐标，得到参数方程.

方法二：利用代数方法，设出点的坐标，再利用向量关系将的坐标用点的坐标表示，代入曲线*C*的直角坐标方程，得到点的轨迹方程，最后化为参数方程.

4．【2021年乙卷文科】在直角坐标系中，的圆心为，半径为1．

（1）写出的一个参数方程;

（2）过点作的两条切线．以坐标原点为极点，*x*轴正半轴为极轴建立极坐标系，求这两条切线的极坐标方程．

【答案】（1），（为参数）；

（2）和．

【解析】

【分析】

（1）直接利用圆心及半径可得的圆的参数方程；

（2）先求得过（4，1）的圆的切线方程，再利用极坐标与直角坐标互化公式化简即可.

【详解】

（1）由题意，的普通方程为，

所以的参数方程为，（为参数）

（2）[方法一]：直角坐标系方法

①当直线的斜率不存在时，直线方程为，此时圆心到直线的距离为，故舍去．

②当切线斜率存在时，设其方程为，即．

故，即，解得．

所以切线方程为或．

两条切线的极坐标方程分别为和．

即和．

[方法二]【最优解】：定义求斜率法

如图所示，过点*F*作的两条切线，切点分别为*A*，*B*．



在中，，又轴，所以两条切线的斜率分别和．

故切线的方程为，，这两条切线的极坐标方程为和．

即和．

【整体点评】

（2）

方法一：直角坐标系中直线与圆相切的条件求得切线方程，再转化为极坐标方程，

方法二：直接根据倾斜角求得切线的斜率，得到切线的直角坐标方程，然后转化为极坐标方程,在本题中巧妙的利用已知圆和点的特殊性求解，计算尤其简洁，为最优解.

5．【2020年新课标1卷理科】在直角坐标系中，曲线的参数方程为为参数．以坐标原点为极点，轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线的极坐标方程为．

（1）当时，是什么曲线？

（2）当时，求与的公共点的直角坐标．

【答案】（1）曲线表示以坐标原点为圆心，半径为1的圆；（2）.

【解析】

【分析】

（1）利用消去参数，求出曲线的普通方程，即可得出结论；

（2）当时，，曲线的参数方程化为 为参数），两式相加消去参数，得普通方程，由，将曲线 化为直角坐标方程，联立方程，即可求解.

【详解】

（1）当时，曲线的参数方程为为参数），

两式平方相加得，

所以曲线表示以坐标原点为圆心，半径为1的圆；

（2）当时，曲线的参数方程为为参数），

所以，曲线的参数方程化为为参数），

两式相加得曲线方程为，

得，平方得，

曲线的极坐标方程为，

曲线直角坐标方程为，

联立方程，

整理得，解得或 （舍去），

，公共点的直角坐标为 .

【点睛】

本题考查参数方程与普通方程互化，极坐标方程与直角坐标方程互化，合理消元是解题的关键，要注意曲线坐标的范围，考查计算求解能力，属于中档题.

6．【2020年新课标2卷理科】已知曲线*C1*，*C2*的参数方程分别为*C1*：（*θ*为参数），*C2*：（*t*为参数）.

（1）将*C1*，*C2*的参数方程化为普通方程；

（2）以坐标原点为极点，*x*轴正半轴为极轴建立极坐标系.设*C1*，*C2*的交点为*P*，求圆心在极轴上，且经过极点和*P*的圆的极坐标方程.

【答案】（1）；；（2）.

【解析】

【分析】

（1）分别消去参数和即可得到所求普通方程；

（2）两方程联立求得点，求得所求圆的直角坐标方程后，根据直角坐标与极坐标的互化即可得到所求极坐标方程.

【详解】

(1)[方法一]：消元法

由得的普通方程为．

由参数方程可得，

两式相乘得普通方程为．

[方法二]【最优解】：代入消元法

由得的普通方程为，

由参数方程可得，

代入中并化简得普通方程为．

(2)[方法一]：几何意义+极坐标

将代入中解得，故*P*点的直角坐标为．

设*P*点的极坐标为，

由得，，．

故所求圆的直径为，

所求圆的极坐标方程为，即．

[方法二]：

由得所以*P*点的直角坐标为．

因为．

设圆*C*的极坐标方程为，所以，

从而，解得．

故所求圆的极坐标方程为．

[方法三]：利用几何意义

由得所以*P*点的直角坐标为，

化为极坐标为，其中．

如图，设所求圆与极轴交于*E*点，则，

所以，所以所求圆的极坐标方程为．



[方法四]【最优解】：

由题意设所求圆的圆心直角坐标为，则圆的极坐标方程为．

联立得解得．

设*Q*为圆与*x*轴的交点，其直角坐标为，*O*为坐标原点．

又因为点都在所求圆上且为圆的直径，

所以，解得．

所以所求圆的极坐标方程为．

[方法五]利用几何意义求圆心

由题意设所求圆的圆心直角坐标为，

则圆的极坐标方程为．

联立得，

即*P*点的直角坐标为．

所以弦的中垂线所在的直线方程为，

将圆心坐标代入得，解得．

所以所求圆的极坐标方程为．

【整体点评】

(1)[方法一]利用乘积消元充分利用了所给式子的特征，体现了解题的灵活性，并不是所有的问题都可以这样解决；

[方法二]代入消元是最常规的消元方法之一，消元的过程充分体现了参数方程与普通方程之间的联系.

(2)[方法一]利用几何意义加极坐标求解极坐标方程是充分利用几何思想的提现，能提现思维的 ；

[方法二]首先确定交点坐标，然后抓住问题的本质，求得的值即可确定极坐标方程；

[方法三]首先求得交点坐标，然后充分利用几何性质求得圆的直径即可确定极坐标方程；

[方法四]直径所对的圆周角为是圆最重要的性质之一，将其与平面向量垂直的充分必要条件想联系进行解题时一种常见的方法；

[方法五]圆心和半径是刻画圆的最根本数据，利用几何性质求得圆心的坐标即可确定圆的方程.

7．【2020年新课标3卷理科】在直角坐标系*xOy*中，曲线*C*的参数方程为(*t*为参数且*t*≠1)，*C*与坐标轴交于*A*，*B*两点.

（1）求||：

（2）以坐标原点为极点，*x*轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线*AB*的极坐标方程.

【答案】（1）（2）

【解析】

【分析】

（1）由参数方程得出的坐标，最后由两点间距离公式，即可得出的值；

（2）由的坐标得出直线的直角坐标方程，再化为极坐标方程即可.

【详解】

（1）令，则，解得或（舍），则，即.

令，则，解得或（舍），则，即.

；

（2）由（1）可知，

则直线的方程为，即.

由可得，直线的极坐标方程为.

【点睛】

本题主要考查了利用参数方程求点的坐标以及直角坐标方程化极坐标方程，属于中档题.