**数学试卷（理科）**

**一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．已知复数（i为虚数单位），则的共轭复数是（ ）

A． B． C． D．

2．设集合，，则（ ）

A． B．

C． D．

3．在中，“”是“”的（ ）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

4．某单位为了解夏季用电量与月份的关系，对本单位2021年5月份到8月份的日平均用电量*y*（单位：千度）进行了统计分析，得出下表数据：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 月份（*x*） | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 日平均用电量（*y*） | 1.9 | 3.4 | *t* | 7.1 |

若*y*与*x*线性相关，且求得其线性回归方程，则表中*t*的值为（ ）

A．5.8 B．5.6 C．5.4 D．5.2

5．已知，则（ ）

A． B． C． D．

6．在直三棱柱中，，，则异面直线与*AC*所成角的余弦值是（ ）

A． B． C． D．

7．近日，上海疫情形势严峻，市疾控中心在我市四家三甲医院选派多名医护人员支援上海，抗击疫情．其中，需要医生8名，现要求每所医院至少抽调一名医生，则不同的名额分配方法种数为（ ）

A．36 B．35 C．32 D．30

8．在中，角*A*，*B*和*C*所对的边长为*a*，*b*和*c*，面积为，且为钝角，的取值范围是（ ）

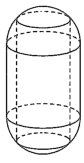
A． B． C． D．

9．已知，下列四个命题：①，，②，，③，，④，．

其中是真命题的有（ ）

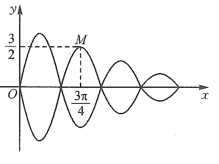
A．①③ B．②④ C．①② D．③④

10．如图所示为某“胶囊”形组合体，由中间是底面半径为1，高为2的圆柱，两端是半径为1的半球组成，现欲加工成一个圆柱，使得圆柱的两个底面的圆周落在半球的球面上，则当圆柱的体积最大时，圆柱的底面半径为（ ）



A． B． C． D．

11．如图所示的曲线就像横放的葫芦的轴截面的边缘线，我们把这样的曲线叫葫芦曲线（也像湖面上高低起伏的小岛在水中的倒影与自身形成的图形，也可以形象地称它为倒影曲线），它每过相同的间隔振幅就变化一次，且过点，其对应的方程为（，其中为不超过*x*的最大整数，）．若该葫芦曲线上一点*N*的横坐标为，则点*N*的纵坐标为（ ）



A． B． C． D．

12．、是椭圆的左、右焦点，点*M*为椭圆*E*上一点，点*N*在*x*轴上，满足，若，则椭圆*E*的离心率为（ ）

A． B． C． D．

**二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．**

13．已知向量，，若，则实数\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

14．若实数*x*，*y*满足则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

15．已知双曲线的上顶点、下焦点分别为*M*，*F*，以*M*为圆心，*b*为半径的圆与*C*的一条渐近线交于*A*，*B*两点，若，*AB*的中点为*Q*（*Q*在第一象限），点*P*在双曲线的下支上，则当取得最小值时，直线*PQ*的斜率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

16．已知正实数*x*，*y*满足，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．**

**（一）必考题：共60分．**

17．（本小题满分12分）

在①，其中为数列的前*n*项和；②，这两个条件中任选一个，补充在下面问题中，并作答．

问题：已知数列满足\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

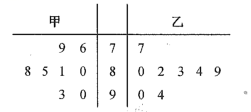
（1）求数列的通项公式；

（2）是否存在正整数*m*，使得为数列中的项？若存在，求出*m*；若不存在，说明理由．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

18．（本小题满分12分）

中国神舟十三号载人飞船返回舱于2022年4月16日在东风着陆场成功着陆，这标志着此次载人飞行任务取得圆满成功．神舟十三号载人飞行任务是中国迄今为止在太空轨道上停留时间最长的一次任务，航天员王亚平成为第一位在太空行走的中国女性．三位航天员在为期半年的任务期间，进行了两次太空行走，完成了20多项不同的科学实验，并开展了两次“天宫课堂”活动，在空间站进行太空授课．神州十三号的成功引起了广大中学生对于航天梦的极大兴趣，某校从甲、乙两个班级所有学生中分别随机抽取8名学生，对他们的航天知识进行评分调查（满分100分），被抽取的学生的评分结果如下茎叶图所示：

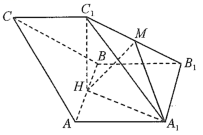


（1）若分别从甲、乙两个班级被抽取的8名学生中各抽取1名，在已知两人中至少有一人评分不低于80分的条件下，求抽到的甲班级学生评分低于80分的概率；

（2）用样本的频率分布估计总体的概率分布，若从甲班级所有学生中，再随机抽取4名学生进行评分细节调查，记抽取的这4名学生中评分不低于90分的人数为，求的分布列与数学期望．

19．（本小题满分12分）

如图所示的斜三棱柱中，是正方形，且点在平面上的射影恰是*AB*的中点*H*，*M*是的中点．



（1）判断*HM*与平面的关系，并证明你的结论；

（2）若，，求直线与平面所成角的正弦值．

20．（本小题满分12分）

已知点*F*为抛物线的焦点，点在抛物线*C*上，且，直线交抛物线*C*于*A*，*B*两点，*O*为坐标原点．

（1）求抛物线*C*的方程；

（2）若直线交抛物线*C*于*M*，*N*两点，直线*AM*与*BN*交于点*T*，求证：点*T*在定直线上．

21．（本小题满分12分）

已知函数，．

（1）求在处的切线方程；

（2）若恒成立，求的最大值．

**（二）选考题：共10分．请考生在第22、23两题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．**

22．（本小题满分10分）选修4—4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系*xOy*中，直线*l*的参数方程为（其中*t*为参数），以*O*为极点，*x*轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线*C*的极坐标方程为．

（1）求直线*l*的普通方程以及曲线*C*的直角坐标方程；

（2）求曲线*C*上的点到直线*l*的距离的最大值．

23．（本小题满分10分）选修4—5：不等式选讲

已知函数．

（1）当时，求的解集；

（2）设，若对，，使得成立，求实数*a*的取值范围．

**数学试卷（理科）参考答案、提示及评分细则**

1．D 因为，所以其共轭复数是．故选D．

2．D 因为，，所以，，．故选D．

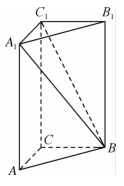
3．C 显然，，若，则，即，所以，反之亦然，所以“”是“”的充要条件．故选C．

4．B 由表格中的数据可得，，将点代入回归直线方程得，解得．故选B．

5．A 因为，所以，所以，所以．故选A．

6．C 如图所示：连接，因为，所以或其补角为异面直线与*AC*所成角．不妨设，则，，．

在中，．故选C．



7．B 将8个元素站成一排，一共产生了9个空，去掉两端的空，现在7个空中插入3个挡板，共有放置方法为．故选B．

8．A 因为，所以，即**，

因为为钝角，所以，，

由正弦定理知，

因为为钝角，所以，即，

所以，所以，

即的取值范围是．故选A．

9．C 对于①．因为，所以，对恒成立．故①正确；

对于②，因为，所以，所以，对恒成立，故②正确；

对于③，因为在上为减函数．所以，故③错误；

对于④，时，即，故④错误．故选C．

10．A 设该几何体的内接圆柱的底面半径为，则其高为，

该内接圆柱的体积为，

因为，

令，解得，当时，；

当时，，所以当时体积有最大值．故选A．

11．D 由曲线过知，，

即，则，解得，

又，所以．若该葫芦曲线上一点*N*的横坐标为，即，

代入曲线方程得到，

则，即点*N*的纵坐标为．故选D．

12．A 由，*N*，三点共线知，所以，所以，，

由角平分线性质知，所以，，

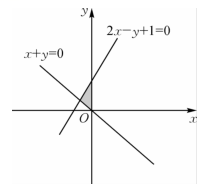
在中，由余弦定理得，

所以，即．故选A．

13． 因为，所以由，

可得，解得．

14． 因为表示可行性区域内的点与点连线斜率．



则知可行区域内点和点与连线的斜率分别是的最大值和最小值，则所求的取值范围为．

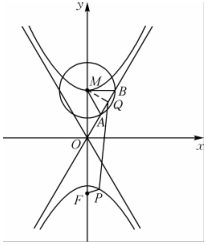
15． 由题意，，由*Q*为*AB*的中点，且在第*一*象限，可知，

不妨设一条渐近线为，则*M*到的距离．又因为，

所以，得，所以，，所以．

因为点*P*在双曲线下支上，所以当*F*，*Q*，*P*三点共线时，取得最小值．

直线*MQ*的方程为，与渐近线方程联立得．所以．



16．2 根据题意有，令，则．

令，则，所以函数在**R**上单调递减，

又因为，所以，所以，

当且仅当时等号成立，所以的最小值为2．

17．解：如果选择条件①：

（1）令，，所以，

则由于，当时，两式相减得：，则，

数列是首项为6，公比为3的等比数列，

则数列的通项公式为．

（2）假设存在正整数*m*，使得，则，

所以，此等式左边为偶数，右边为奇数，

所以不存在正整数*m*满足题意．

如果选择条件②：

（1）由，得，

所以是首项，公差为1的等差数列，

所以，

所以．

（2）假设存在正整数*m*，使得，

则，化简得，

解得，

因为，所以，

*m*无正整数解，故不存在这样的*m*满足题意．

18．解：（1）设事件*A*为两人中至少一人评分不低于80，事件*B*为甲班级学生评分低于80；

则．

（2）由题意知，，

则．

所以其分布列如下：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *P* |  |  |  |  |  |

．

19．解：（1）直线*HM*与平面平行．

证明如下：取的中点*N*，连接*NM*，*AN*．

因为点*M*是的中点，所以，且．

又是正方形，点*H*是*AB*的中点，所以，．

所以，，

所以四边形*ANMH*为平行四边形．所以，

因为平面，平面，

所以平面．

（2）因为点在平面上的射影是*AB*的中点*H*，所以平面．

以*H*为坐标原点，以*HA*，过*H*与平行的直线以及分别为*x*轴，*y*轴，*z*轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则，，，，

则，，．

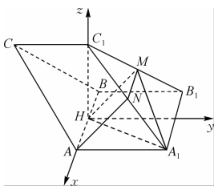
设平面的一个法向量，

则即

令，则．

则，

所以直线与平面所成角的正弦值为．



20．（1）解：由可知，抛物线*C*的准线为：，

点到准线的距离为，根据抛物线定义：，，

抛物线*C*的方程为．

（2）证明：设，，，，，．

，．

由，，得，即，

同理，

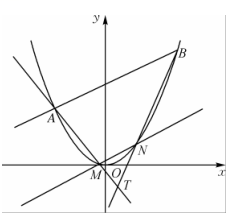
由得①，

由得②，

①②两式相加得，

即，

，，点*T*在定直线上．



21．解：（1），所以，又．

所以切线方程为，即．

（2），

当时，，所以此时在**R**上单调递增．

①若，则当时满足条件，此时；

②若，取且，此时，

所以不恒成立，此时不满足条件；

当时，由，得；由，得，

所以在上单调递减，在上单调递增．

要使得恒成立，

必须有当时，成立，

所以，

所以．

令，，则，

因为在上单调递减，且，

所以当**时，；

当时，．

所以在上单调递增，在上单调递减，

所以当时，，

综上，当，时，取最大值1．

22．解：（1）直线*l*的参数方程为（其中*t*为参数），

消去参数可得，即直线*l*的普通方程为．

因为曲线*C*的极坐标方程为，

展开为，

所以，因为，，，

所以曲线*C*的平面直角坐标方程为．

（2）将曲线*C*的方程配方得，

它表示圆心坐标为，半径为的圆，

因为圆心到直线的距离，

所以圆上的点到直线*l*的距离的最大值为．

23．解：（1）当时，

①无解；②无解；③解得，

所以的解集为．

（2）因为时，，

即．

因为在上单调递增，

所以时，，

因为对，，使得成立，

所以，所以，

因为，所以，解得或．

所以实数*a*的取值范围为．